

SIMULAÇÃO FÍSICA DA TRANSFORMAÇÃO ENTRE OBJECTOS ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DINÂMICA DE EQUILÍBRIO EM IMAGENS

Pinho*, R. R.; Tavares**, J. M. R. S.

* Investigadora. LOME – FEUP, Porto – Portugal. E-mail: rpinho@fe.up.pt

** Prof. Auxiliar. DEMEGI – FEUP, Porto – Portugal. E-mail: tavares@fe.up.pt. Url: www.fe.up.pt/~tavares

RESUMO

Neste artigo será abordada uma metodologia que utiliza a resolução da equação dinâmica de equilíbrio para determinar/simular o campo de deslocamentos entre objectos deformáveis representados em imagens. Assim, dadas duas representações do mesmo objecto, ou de dois objectos distintos, atendendo a princípios físicos pode ser feita a estimação temporal (faseada) da sua transformação/deformação. Para traduzir a deformação existente entre as duas formas pode ser utilizada a energia de deformação global ou local. Essas energias, assim como as intensidades das cargas aplicadas podem ser utilizadas para representar as formas intermédias. A referida metodologia permite, também, a simulação exclusiva das componentes não rígidas da deformação.

1. INTRODUÇÃO

Ainda que exista um vasto trabalho de estimação do movimento entre objectos representados em imagens, nem sempre os resultados obtidos são coerentes com as propriedades físicas dos objectos representados. Assim, neste artigo será apresentada a resolução da equação dinâmica de equilíbrio, como metodologia para simular fisicamente a transformação/deformação sofrida, entre objectos representados em imagens. A referida metodologia pode ser aplicada entre representações do mesmo objecto ou entre objectos distintos.

Pressupondo a modelação física dos objectos por intermédio do Método dos Elementos Finitos, utilizando o elemento

finito isoparamétrico de Sclaroff ((Sclaroff, 1995), (Tavares, 2000)), e o estabelecimento de correspondências de parte dos nodos (dados pontuais) das duas formas, conseguida através da análise dos deslocamentos nodais no respectivo espaço modal; É, neste trabalho, dada ênfase à solução dinâmica para estimar os deslocamentos modais, que recorre à resolução da equação dinâmica de equilíbrio para simular fisicamente o campo de deslocamentos entre as formas dadas ((Nastar, 1994), (Sclaroff, 1995), (Tavares, 2000, 2000a, 2000b), (Pinho, 2002, 2003)).

As formas intermédias estimadas pela metodologia proposta, podem ser representadas em imagens por intensidades das cargas aplicadas ou então, de acordo

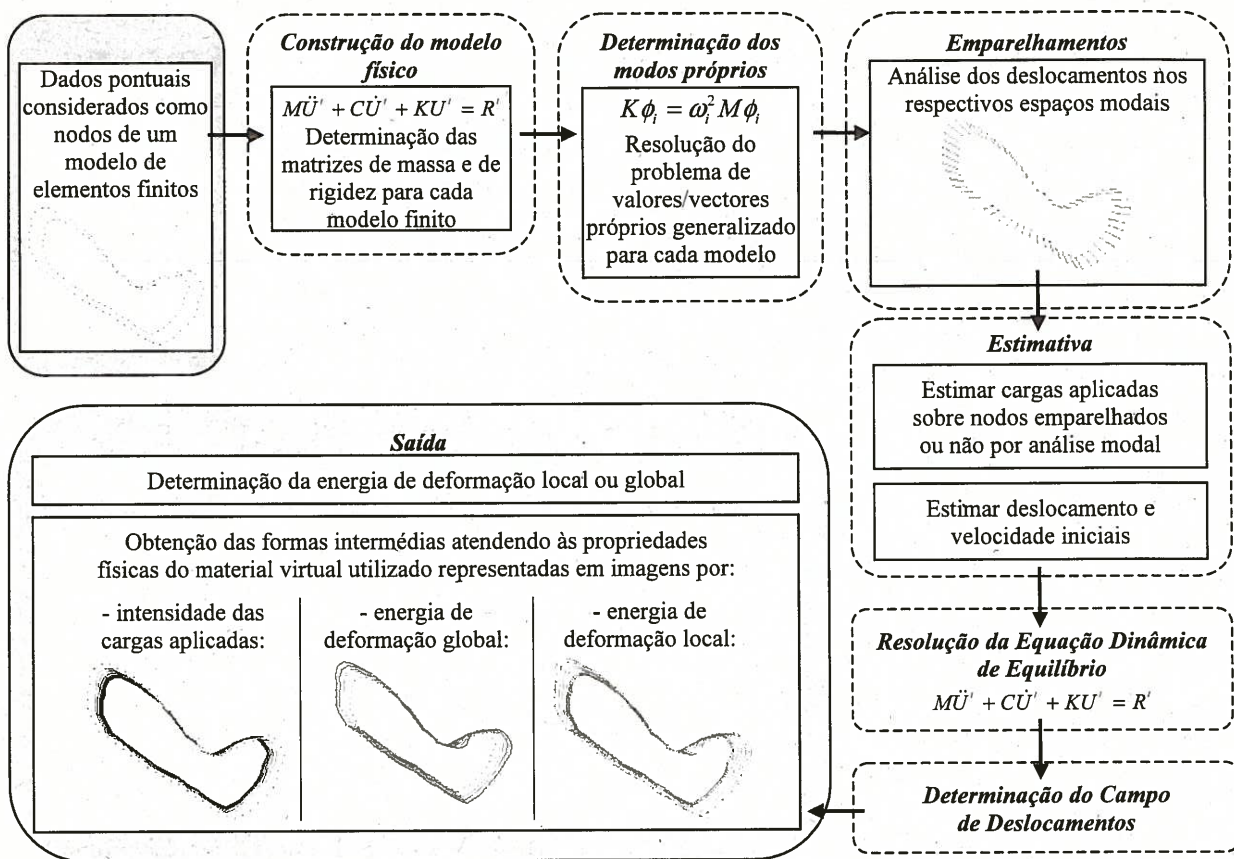


Fig 1. Diagrama da metodologia proposta para simular o movimento/deformação entre objectos em imagens.

com os níveis de energia da deformação global ou local que traduz a transformação envolvida (figura 1).

Para se proceder à resolução da equação de equilíbrio, torna-se necessário estimar alguns parâmetros, uma vez que se admite que são desconhecidas quaisquer informações adicionais acerca dos objectos representados, e do movimento/deformação em causa. Assim, de forma a resolver-se a equação de equilíbrio, foram encontradas soluções para estimar o deslocamento e velocidade iniciais, assim como as cargas aplicadas sobre os nodos não emparelhados com êxito por Análise Modal.

Em algumas aplicações do trabalho proposto, poderá ser útil a simulação da componente não rígida da transformação global existente entre os objectos. Assim, foi utilizado um método que estima a transformação rígida existente, o que permite considerar para a simulação apenas a componente não rígida.

Neste artigo serão apresentadas a

modelação física utilizada, a metodologia considerada para a determinação dos emparelhamentos, os métodos de integração utilizados para a resolução numérica da equação de equilíbrio, as soluções utilizadas para estimar de forma adequada o deslocamento inicial, a velocidade inicial, e as cargas envolvidas na transformação, os procedimentos empregues para resolver os problemas associados aos nodos não emparelhados com êxito pela Análise Modal, assim como a forma encontrada para simular apenas a componente não rígida da transformação. Também, serão apresentados vários exemplos de resultados experimentais obtidos e as respectivas conclusões.

A metodologia proposta e apresentada neste artigo pode ser utilizada para fazer o *morphing* (transformação faseada) segundo princípios físicos, a reconstrução tridimensional de objectos a partir de cortes (imagens bidimensionais), a segmentação, etc.

2. ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO DE SCLAROFF

Usando o método de Galerkin (ver, por exemplo, (Bathe, 1996)) para discretizar um dado objecto real, pode-se obter um sistema de funções de forma que relacionam o deslocamento de um único ponto com o deslocamento de todos os outros nodos do objecto. Neste trabalho utilizamos o elemento isoparamétrico de Sclaroff ((Sclaroff, 1995), (Tavares, 2000)), que para construir a matriz de proximidade, H (que traduz as distâncias entre os pontos do objecto), utiliza as funções Gaussianas:

$$g_i(X) = e^{-\|X-X_i\|^2/(2\sigma^2)}, \quad (1)$$

onde X_i é o centro de dimensão n das funções Gaussianas e σ é o desvio padrão que controla a interacção entre os dados do objecto, para construir as funções de interpolação, h_i , dadas por:

$$h_i(X) = \sum_{k=1}^m a_{ik} g_k(X), \quad (2)$$

onde a_{ik} são coeficientes tais que h_i tome valores não-nulos apenas no nodo i , e m é o número de pontos amostrais do objecto. A matriz, A , dos coeficientes de interpolação, a_{ik} , pode ser determinada por inversão da matriz G definida como:

$$G = \begin{bmatrix} g_1(X_1) & \cdots & g_1(X_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_m(X_1) & \cdots & g_m(X_m) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Deste modo, a matriz de interpolação do elemento isoparamétrico de Sclaroff, para um objecto bidimensional, será da forma:

$$H(X) = \begin{bmatrix} h_1 & \cdots & h_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_1 & \cdots & h_m \end{bmatrix}. \quad (4)$$

A construção das matrizes de massa, M , e rigidez, K , prossegue usualmente, mas uma descrição detalhada pode ser consultada em (Sclaroff, 1995), (Tavares, 2000), ou (Pinho, 2002).

Para simular o campo de deslocamentos entre imagens de objectos deformáveis, é também necessário considerar o amortecimento. Neste trabalho, utilizamos o amortecimento de Rayleigh, segundo o qual a matriz de amortecimento, C , consiste na combinação linear das matrizes de massa e rigidez previamente determinadas:

$$C = \hat{\alpha}M + \hat{\beta}K, \quad (5)$$

onde $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ são, respectivamente, as constantes de massa e rigidez do amortecimento proporcional, determinadas em função das fracções de amortecimento crítico (Cook, 1986).

3. EMPARELHAMENTO MODAL

O estabelecimento das correspondências entre os m e n nodos dos modelos inicial, t , e objectivo, $t+1$, respectivamente, é feito através da resolução do problema de valores próprios generalizado de cada um:

$$K\Phi = M\Phi\Omega, \quad (6)$$

onde (para um modelo bidimensional com m nodos):

$$\Phi = [\phi_1 \mid \cdots \mid \phi_{2m}] = \begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_m^T \\ v_1^T \\ \vdots \\ v_m^T \end{bmatrix} \quad (7)$$

e

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_{2m}^2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

sendo que o vector de forma do modo i , ϕ_i , descreve o deslocamento (u, v) para cada nodo devido a esse modo, e na matriz diagonal Ω os quadrados das frequências de vibração são ordenados de forma crescente.

Construídas as matrizes modais Φ_t e Φ_{t+1} , para os modelos t e $t+1$, respectivamente, as correspondências obtêm-se por comparação dos deslocamentos de cada nodo nos respectivos espaços modais. Assim, é construída uma matriz de afinidades, Z , cujos elementos são dados por:

$$Z_{ij} = \|u_{1,i} - u_{2,j}\|^2 + \|v_{1,i} - v_{2,j}\|^2, \quad (9)$$

onde os melhores emparelhamentos são indicados pelos mínimos na sua linha e na sua coluna. Na construção desta matriz é normal desprezar-se os modos não rígidos e/ou os modos de alta ordem (Tavares, 2000).

4. DETERMINAÇÃO DAS DEFORMAÇÕES

Um benefício da técnica proposta por Sclaroff ((Sclaroff, 1995), (Tavares, 2000)), é que os valores próprios determinados para o estabelecimento de correspondências modais, servem também para descrever as deformações rígidas ou não, necessárias ao alinhamento de um objecto com outro.

4.1 Determinação das deformações via alinhamento modal

Pretendemos determinar os parâmetros de deformação \tilde{U} que transportam um conjunto de pontos de uma forma (inicial) no conjunto de pontos correspondente da segunda (ou objectivo). Dadas as matrizes de forma, Φ_1 e Φ_2 , com as correspondências estabelecidas entre os nodos de um dos modelos associados, então pode-se determinar o deslocamento modal directamente. Notando que os deslocamentos nodais U que alinham pontos correspondentes podem ser descritos por:

$$U_i = X_{2,i} - X_{1,i}, \quad (10)$$

onde $X_{1,i}$ é o i -ésimo nodo da primeira forma, e $X_{2,i}$ o da segunda forma, e U_i é o deslocamento do nodo i .

A matriz Φ é uma transformação de coordenadas generalizada utilizada para transformar os deslocamentos modais, \tilde{U} , nos nodais, U , e vice-versa:

$$U = \Phi \tilde{U}. \quad (11)$$

Sabendo também que $\Phi^T M \Phi = I$, onde I é a matriz identidade, resulta:

$$\tilde{U} = \Phi^{-1} U = \Phi^T M U. \quad (12)$$

Uma das dificuldades geralmente encontradas consiste em não haver um emparelhamento de um para um entre os nodos dos dois objectos. Contudo, o que se pretende é que os dados não emparelhados se movam de forma coerente com as propriedades do material virtual adoptado para o objecto, e com as forças aplicadas nos nodos emparelhados. Este tipo de solução pode ser obtido de diversas formas ((Sclaroff, 1995), (Tavares, 2000)).

Numa abordagem mais simples, dados os deslocamentos nodais dos nodos emparelhados U_i , podem-se considerar nulas todas as entradas do vector de forças aplicadas, R , correspondentes a nodos não emparelhados. A equação de equilíbrio será então dada por:

$$KU = R, \quad (13)$$

onde o número de incógnitas iguala o número de dados. Resolvendo a equação de equilíbrio acima, e substituindo em (12), encontramos os valores dos deslocamentos modais.

Ainda que a aplicação desta técnica seja simples, ela pressupõe que as forças aplicadas aos nodos não emparelhados é nula, o que pode não ser uma assumption válida (Tavares, 2000).

Outra forma de determinar os deslocamentos modais consiste em truncar os nodos considerados. Suponhamos que p dos m nodos estão emparelhados. Assim sendo são conhecidos alguns vectores de

forma, pelo que podemos reorganizar as colunas de Φ^{-1} do seguinte modo:

$$\left[\begin{array}{c|c} \Phi_{conhecida}^{-1} & \Phi_{desconhecida}^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_{conhecido} \\ U_{desconhecido} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{desconhecido} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

onde $U_{conhecido}$ é o vector dos deslocamentos dos p nodos emparelhados, $U_{desconhecido}$ é o vector dos deslocamentos nodais não emparelhados, e $\tilde{U}_{desconhecido}$ é o vector das amplitudes modais que se pretende determinar. Segundo esta formulação, assumimos que as amplitudes dos modos que descartamos são nulas.

Reagrupando os termos da equação anterior obtemos:

$$\left[\begin{array}{c|c} \Phi_{conhecida}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} U_{conhecido} \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I & \Phi_{desconhecida}^{-1} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \tilde{U}_{desconhecido} \\ U_{conhecido} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Invertendo a matriz da direita obtêm-se, directamente, as amplitudes modais desejadas. De notar que, neste processo, assumimos que os deslocamentos modais $\tilde{U}_i = 0$, para $i > p$.

Um outro processo de resolução poderá ser a consideração de uma restrição adicional segundo a qual são encontradas amplitudes modais que minimizam a energia de deformação:

$$E_i = \frac{1}{2} \tilde{U}^T \Omega^2 \tilde{U}. \quad (16)$$

Assim, é contornado o inconveniente dos processos anteriormente mencionados, já que não é obrigatório que as forças aplicadas nos nodos não emparelhados sejam nulas. Mas, na equação de energia de deformação acima as frequências correspondentes a modos mais elevados contribuem substancialmente para o valor da energia de deformação (ainda que estas sejam responsáveis por deslocamentos de baixas amplitudes, (Tavares, 2000)). Assim, deve-se ponderar a participação dos modos mais elevados da seguinte forma:

$$Erro = [U - \Phi \tilde{U}]^T [U - \Phi \tilde{U}] + \lambda \tilde{U}^T \Omega^2 \tilde{U}, \quad (17)$$

onde λ é o parâmetro de Lamé para o material adoptado:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (18)$$

Derivando em relação ao vector dos deslocamentos modais, \tilde{U} , a equação acima obtemos a equação de minimização de energia pelo método dos mínimos quadrados:

$$\tilde{U} = [\Phi^T \Phi + \lambda \Omega]^2 \Phi^T U. \quad (19)$$

Com este método pode-se prever, como veremos, de forma razoável os deslocamentos dos nodos não emparelhados.

Como o algoritmo utilizado para a determinação das correspondências entre nodos fornece o grau de confiança de cada emparelhamento obtido (Tavares, 2000), podemos utilizar essa informação adicional na fase do alinhamento, pela inclusão de uma matriz diagonal W :

$$\tilde{U} = [\Phi^T W \Phi + \lambda \Omega]^2 \Phi^T W^2 U. \quad (20)$$

As entradas de W são inversamente proporcionais às medidas de afinidade, sendo nulas as entradas dos nodos não emparelhados ((Scaloff, 1995), (Tavares, 2000)).

4.2 A Solução Dinâmica

O alinhamento de dois modelos pode também ser feito por simulação física, através da integração no tempo da equação do elemento finito, até que seja atingido o equilíbrio. Por este processo as deformações são calculadas a cada instante através da equação dinâmica de equilíbrio de Lagrange:

$$\ddot{U}' + \tilde{C} \dot{U}' + \Omega \tilde{U}' = \Phi^T R', \quad (21)$$

onde \ddot{U}' e \dot{U}' são, respectivamente, a segunda e primeira derivadas temporais do vector dos deslocamentos modais e \tilde{C} é a matriz diagonal de amortecimento global. Deste modo são calculadas as deformações intermédias, de maneira coerente com as propriedades físicas do objecto, que foram consideradas através do método dos elementos finitos e do material virtual adoptado. Assim sendo, as deformações intermédias permitem que se estime a deformação envolvida segundo princípios físicos.

Ao resolver a equação dinâmica de Lagrange pretende-se que sejam utilizados os dados de um modelo $t+1$ (objectivo), para exercer forças no modelo t (inicial) por forma a que este se transforme no segundo. Para tal, consideraram-se as cargas dinâmicas $R(t)$ como sendo proporcionais à distância entre nodos correspondentes:

$$R_i(t + \Delta t) = k(X_{2,i} - X_{1,i}), \quad (22)$$

onde k é uma constante global de rigidez. Estas forças actuam como se fossem forças elásticas sobre os nodos dos objectos, e vão diminuindo de intensidade à medida que o objecto em causa se ajusta aos dados. O sistema modal de equilíbrio pode ser decomposto em $2m$ equações independentes com o seguinte formato:

$$\ddot{u}'_i + \tilde{c}_i \dot{u}'_i + \omega_i u'_i = \tilde{r}_i(t), \quad (23)$$

onde $\tilde{r}_i(t)$ são as componentes do vector de cargas transformado, $\tilde{R}(t) = \Phi^T R(t)$, que têm de ser actualizadas a cada instante de tempo, através da equação (22).

É este sistema de equações de equilíbrio independentes que se pretende resolver através de métodos numéricos de integração. Considerar-se-á que o sistema está em equilíbrio sempre que ao integrar no tempo para a frente, a diferença no deslocamento obtido no último passo iterativo seja inferior a um dado δ :

$$\|U(t)\| < \delta. \quad (24)$$

Convém referir que o critério de equilíbrio utilizado pode ser traduzido em função das forças aplicadas, isto é, segundo o critério acima apresentado, o equilíbrio é atingido se e só se a diferença entre as forças aplicadas nas últimas duas iterações for inferior a dado valor.

5. ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Uma vez estimado o campo de deslocamentos através da resolução da equação dinâmica de equilíbrio, pode-se calcular a energia de deformação envolvida em cada uma das fases estimadas da transformação – energia de deformação global. Ou então, também se pode avaliar a energia de deformação associada ao deslocamento estimado para cada nodo – energia de deformação local.

De uma forma geral a energia de deformação global da forma I , E_I , pode ser calculada por:

$$E_I = U^T K U, \quad (25)$$

onde U representa o vector de deslocamentos nodais.

Assim se:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad (26)$$

e

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

então:

$$E_I = \sum_{i=1}^n u_i \sum_{j=1}^n k_{ij} u_j. \quad (28)$$

Como a energia de deformação global é dada pelo somatório das suas componentes locais, a energia de deformação local, no nodo l , é dada por:

$$E_{l,l} = u_l \sum_{j=1}^n k_{lj} u_j. \quad (29)$$

Avaliada a energia de deformação, global e local, existente, pode-se quantificar a transformação envolvida assim como representar as formas intermédias estimadas por intensidades correspondentes à intensidade da energia de deformação envolvida.

Uma outra utilização, como adiante veremos, da energia de deformação poderá ser o reconhecimento e a comparação de objectos ((Sclaroff, 1995), (Tavares, 2000)).

6. ESTIMATIVA DA COMPONENTE NÃO RÍGIDA DA TRANSFORMAÇÃO

Nos diversos domínios em que este trabalho pode ser aplicado, poderá ser útil estimar o comportamento dinâmico apenas das componentes não rígidas da transformação global envolvida. Nesse sentido, foi incluída uma opção na implementação da metodologia proposta que permite a aplicação da transformação rígida existente entre as formas dadas, aos

nodos da forma inicial antes da resolução da equação dinâmica de equilíbrio. Assim, a forma obtida após a aplicação da transformação rígida envolvida estimada à forma inicial, é considerada como sendo a nova forma inicial e a resolução da equação de Lagrange prossegue como o descrito anteriormente. Deste modo, as formas intermédias obtidas descrevem apenas a componente não rígida da transformação global existente entre as representações dadas.

A estimativa da transformação rígida é conseguida pelo método proposto por Horn ((Horn, 1987), (Tavares, 2000)), e baseia-se na minimização por mínimos quadrados do erro da transformação determinada. Assim, (Tavares, 2000), começa-se por determinar os centróides de cada objecto, e de seguida as coordenadas centrais (obtidas das anteriores por subtracção das coordenadas de cada ponto). Depois, para definir a matriz de rotação recorre-se a um *quaternion* unitário, que representa o eixo e o ângulo de rotação. Deste modo, recorrendo ao método dos mínimos quadrados, por forma a reduzir os erros residuais associados à rotação, determina-se o *quaternion* unitário, \hat{q} , que maximiza $\hat{q}^T N \hat{q}$, onde N é a matriz simétrica construída com as coordenadas centrais dos pontos das duas formas:

$$N = \begin{bmatrix} S_{xx} + S_{yy} + S_{zz} & S_{yz} - S_{zy} & S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} - S_{yx} \\ S_{yz} - S_{zy} & S_{xx} - S_{yy} - S_{zz} & S_{xy} + S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} \\ S_{zx} - S_{xz} & S_{xy} + S_{yx} & -S_{xx} + S_{yy} - S_{zz} & S_{yz} + S_{zy} \\ S_{xy} - S_{yx} & S_{zx} + S_{xz} & S_{yz} + S_{zy} & -S_{xx} - S_{yy} + S_{zz} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

onde

$$S_{ab} = \sum_{i=1}^n a_{i,t} b_{i,t+1}, \quad (31)$$

com a e b a representar as componentes x , y , z dos vectores de coordenadas centrais para as formas t e $t+1$ de cada nodo i emparelhado, e n o número de nodos considerado. O *quaternion* unitário

\hat{q} é um vector unitário com a mesma direcção do vector próprio associado ao maior valor próprio da matriz N ((Chapra, 1988), (Press, 1992), (Tavares, 2000)).

Se $\hat{q} = q_0 + \vec{q}$, onde q_0 é um escalar, e $\vec{q} = (q_x, q_y, q_z)^T$, a matriz de rotação, R , é dada por:

$$R = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 & 2(q_x q_y - q_0 q_z) & 2(q_x q_z + q_0 q_y) \\ 2(q_y q_x + q_0 q_z) & q_0^2 - q_x^2 + q_y^2 - q_z^2 & 2(q_y q_z - q_0 q_x) \\ 2(q_z q_x - q_0 q_y) & 2(q_z q_y + q_0 q_x) & q_0^2 - q_x^2 - q_y^2 + q_z^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

O factor de escala é determinado pela raiz quadrada do quociente dos desvios quadráticos das coordenadas das duas formas relativamente aos centróides correspondentes. Finalmente, a translação, T , é determinada a partir da diferença entre as coordenadas dos centróides da forma objectivo e da forma inicial previamente rodada e escalada.

Após a estimativa da transformação rígida envolvida, começa-se por aplicar aos nodos da forma inicial a rotação determinada em torno do eixo que passa pela origem, afectada pelo respectivo factor de escala relativamente ao mesmo ponto, seguindo-se a translação estimada. Deste modo, se se considerar a forma obtida após a aplicação da transformação rígida estimada como a nova forma inicial, prosseguindo com a resolução da equação dinâmica de equilíbrio, estimam-se exclusivamente as componentes não rígidas da transformação global envolvida.

7. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO

Para determinar o campo de deslocamentos, na metodologia proposta, é necessário resolver a equação dinâmica de equilíbrio. Assim, nesta secção apresentaremos alguns métodos de integração que podem ser utilizados para a integrar numericamente a equação de Lagrange. Também, e porque se pressupôs o desconhecimento de informações adicionais dos objectos representados assim como da transformação envolvida, apresentaremos a solução adoptada para estimar os parâmetros necessários à resolução numérica (como o deslocamento e velocidade iniciais, e as cargas aplicadas sobre os nodos emparelhados ou não com êxito por Análise Modal).

7.1 Métodos de Integração

Existem vários métodos numéricos de integração que podem ser utilizados na resolução da equação de Lagrange. Neste artigo utilizamos o método da Diferença Central, o método de Newmark e o método de Sobreposição de Modos.

7.1.1 Método da Diferença Central

O método da Diferença Central considera as seguintes aproximações da aceleração e velocidade (com erro de truncatura da ordem de Δt^2):

$$\begin{cases} \ddot{U}' = \frac{1}{\Delta t^2} (U'^{-\Delta t} - 2U' + U'^{+\Delta t}) \\ \dot{U}' = \frac{1}{2\Delta t} (-U'^{-\Delta t} + U'^{+\Delta t}) \end{cases} \quad (33)$$

Assim, a solução do campo de deslocamentos para $t + \Delta t$ é obtida a partir da consideração da equação dinâmica de equilíbrio no instante t ,

$$M\ddot{U}' + C\dot{U}' + KU' = R', \quad (34)$$

onde se substituem as igualdades em (33) para obter:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right) U'^{+\Delta t} &= R' - \left(K - \frac{2}{\Delta t^2} M \right) U' \\ &\quad - \left(\frac{1}{\Delta t^2} M - \frac{1}{2\Delta t} C \right) U'^{-\Delta t} \end{aligned} \quad (35)$$

que é resolvida em ordem a $U'^{+\Delta t}$.

Convém notar que para iniciar o processo resolutivo são necessários o deslocamento e a velocidade iniciais, assim como também as cargas aplicadas a cada instante. Ainda, é necessário $U'^{-\Delta t}$ (uma vez que o cálculo de $U'^{+\Delta t}$ é feito a partir dos dois instantes de tempo imediatamente

anteriores, U^i e $U^{i-\Delta t}$), o que segundo (Bathe, 1996) pode ser estimado a partir de (26) e (27), obtendo-se:

$$U_i^{-\Delta t} = U_i^0 - \Delta t \dot{U}_i^0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_i^0, \quad (36)$$

onde o índice i indica a i -ésima componente do vector considerado.

Este método geralmente só é aplicado quando se pode assumir que matriz de massa é diagonal e o amortecimento pode ser negligenciado, uma vez que nestas circunstâncias o seu custo computacional é menor (Bathe, 1996). Caso as matrizes de massa e de rigidez sejam diagonais, (35) representa um sistema de equações desacopladas, e neste caso o método apresentado é economicamente competitivo com os métodos implícitos (Cook, 1989).

Contudo, as matrizes de massa e de amortecimento de Rayleigh, determinadas utilizadas, não são diagonais, e o método da Diferença Central tal como foi descrito acima é mais preciso para matrizes de massa, M , e de amortecimento, C , diagonais (Cook, 1989). Este problema é contornado, substituindo as aproximações da aceleração e velocidade em (33) por:

$$\begin{cases} \ddot{U}^t = \frac{1}{\Delta t} \left(\dot{U}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{U}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \right) \\ \dot{U}^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{\Delta t} (U^t - U^{t-\Delta t}) \end{cases} \quad (37)$$

Assim, a equação (34) sofre um atraso na velocidade em meio intervalo de tempo:

$$M\ddot{U}^t + C\dot{U}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + KU^t = R^t, \quad (38)$$

e o esquema do método da Diferença Central adequado às situações em que C e M não são diagonais é dado por:

$$\frac{1}{\Delta t^2} MU^{t+\Delta t} = R^t - KU^t - C\dot{U}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \frac{1}{\Delta t^2} M \left(U^t + \Delta t \dot{U}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \right), \quad (39)$$

sendo que $\dot{U}^{t-\frac{\Delta t}{2}}$ é actualizado em cada iteração através de (37). Para ser inicializado, este método requer U^0 e $\dot{U}^{\frac{\Delta t}{2}}$ (que foi aproximado por \dot{U}^0).

Ainda que as equações (37) sejam de segunda ordem, este esquema tem precisão de primeira ordem quando a matriz de amortecimento é não nula, uma vez que as

forças viscosas, $C\dot{U}^{t-\frac{\Delta t}{2}}$, estão atrasadas meio intervalo de tempo.

Contudo, uma desvantagem do método da Diferença Central é o tamanho do passo de tempo, que deve ser relativamente reduzido, já que este método é condicionalmente estável (Bathe, 1996). Se para o esquema (35) era necessário que:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}}, \quad (40)$$

já o esquema (39) é mais restritivo uma vez que:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right), \quad (41)$$

onde ξ é a fracção de amortecimento crítico na maior frequência natural sem amortecimento, ω_{\max} (Cook, 1989).

7.1.2 Método de Newmark

O método de Newmark, resumidamente, é um método de segunda ordem cujas aproximações da velocidade e do deslocamento em cada instante são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} \dot{U}^{t+\Delta t} = \dot{U}^t + \left[(1-\delta)\ddot{U}^t + \delta\ddot{U}^{t+\Delta t} \right] \Delta t \\ U^{t+\Delta t} = U^t + \dot{U}^t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{U}^t + \alpha \ddot{U}^{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \end{cases} \quad (42)$$

onde α e δ são parâmetros a determinar por forma a que sejam obtidos resultados exactos e estáveis (Bathe, 1996).

Substituindo (42) na equação dinâmica de equilíbrio obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} C + K \right) U^{t+\Delta t} = R' \\ & + \left(\frac{1}{\alpha \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} C \right) U^t \\ & + \left(\frac{1}{\alpha \Delta t} M - \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \right) C \right) \dot{U}^t + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) M \ddot{U}^t \\ & - \left((1-\delta) \Delta t - \left(\frac{1}{2\alpha} - 1 \right) \Delta t \delta \right) C \ddot{U}^t \end{aligned} \quad (43)$$

Segundo (Cook, 1989), este método é incondicionalmente estável para:

$$2\alpha \geq \delta \geq 0.5. \quad (44)$$

Convém contudo salientar que para qualquer valor de α , se $\delta = 0.5$, este método não possui amortecimento numérico. Se $\delta > 0.5$, é introduzido amortecimento artificial, mas também, se obtém valores menos exactos, uma vez que os resultados obtidos têm precisão de primeira ordem. Por outro lado, quando:

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(\delta + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (45)$$

é maximizada a dissipação de alta frequência para qualquer valor de $\delta > 0.5$ (Cook, 1989).

7.1.3 Método da Sobreposição de Modos

Este método propõe a seguinte transformação:

$$U(t) = \Phi X(t), \quad (46)$$

e deste modo, obtêm-se como equações de equilíbrio correspondentes aos deslocamentos modais generalizados:

$$\ddot{X}(t) + \Phi^T C \Phi \dot{X}(t) + \Omega^2 X(t) = \Phi^T R(t), \quad (47)$$

já que:

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2 \text{ e } \Phi^T M \Phi = I. \quad (48)$$

O objectivo desta transformação consiste em obter novas matrizes de rigidez, massa e amortecimento com menor largura de banda (Bathe, 1996).

Neste trabalho utilizamos o método da Diferença Central ou o método de Newmark para resolver (47). Assim, a resolução do método da Sobreposição de Modos usando o método da Diferença Central é feita através de:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\Delta t^2} I + \frac{1}{2\Delta t} \Phi^T C \Phi \right) X^{t+\Delta t} = \Phi^T R' \\ & - \left(\Omega^2 - \frac{2}{\Delta t^2} I \right) X^t. \end{aligned} \quad (49)$$

$$- \left(\frac{1}{\Delta t^2} I - \frac{1}{2\Delta t} \Phi^T C \Phi \right) X^{t-\Delta t}$$

De salientar que quando se resolve a equação (49) pelo método da Diferença Central o esquema a utilizar é o primeiro apresentado, (35), uma vez que $\Phi^T C \Phi$ é uma matriz diagonal.

Quando se utiliza o método de Newmark para resolver a equação dada pelo método de Sobreposição de Modos (de maneira análoga ao que foi feito para o método da Diferença Central), utiliza-se o esquema proposto anteriormente para o método de Newmark, com substituição das matrizes M , C e K por I , $\Phi^T C \Phi$ e Ω^2 , respectivamente.

Este método possibilita que apenas alguns modos sejam utilizados nos cálculos, já que em alguns problemas os modos de alta frequência participam pouco na deformação, e apenas uma parte dos modos de baixa frequência precisa de ser usada. A medida referida reduz o custo computacional associado ao processo de resolução da equação dinâmica de equilíbrio e despreza, essencialmente, as componentes locais da transformação.

7.2 Cargas Aplicadas

As cargas aplicadas sobre os nodos emparelhados foram estimadas, neste trabalho, como sendo proporcionais ao deslocamento total pretendido:

$$R(i) = k(X_{2,i} - X_{j,i}), \quad (50)$$

onde $R(i)$ representa a i -ésima componente do vector de cargas quando i é um nodo emparelhado, $X_{2,i}$ são as coordenadas na forma final do nodo i , $X_{1,i}$ representa as coordenadas do nodo i na forma j , e k é a constante global de rigidez (neste trabalho, obedecendo-se a um critério de comodidade na especificação dos parâmetros de entrada por parte do utilizador da metodologia implementada, consideramos a constante global de rigidez igual para todos os componentes de R). O problema associado aos nodos da forma inicial não emparelhados com êxito por Análise Modal, consiste em não serem conhecidas as coordenadas desses nodos na forma objectivo. Assim, neste trabalho se B for um nodo não emparelhado compreendido entre os nodos A e C , emparelhados com A' e C' respectivamente, e se B corresponder ao i -ésimo nodo da forma inicial, a componente do vector de cargas referente a este nodo é dada por:

$$R(i) = k \left(\sum_{\substack{B' \text{ todos os} \\ \text{nodos} \\ \text{entre } A' \text{ e } C'}} \left[\frac{D_i - D_B}{D_i} (X_{2,B'} - X_{1,i}) \right] \right), \quad (51)$$

onde D_i representa a soma das distâncias de todos os nodos envolvidos no cálculo do vector de cargas para o nodo não emparelhado, e D_B representa a distância do nodo B ao nodo não emparelhado (figura 2).

Note-se que esta solução baseia-se no princípio de vizinhança, isto é, nodos vizinhos na forma inicial devem manter-se como tal na forma final.

7.3 Deslocamento e Velocidade Iniciais

Os métodos numéricos apresentados requerem para o arranque do processo resolutivo o deslocamento e velocidade iniciais. A solução encontrada, neste trabalho, para estimar o deslocamento inicial consiste em considera-lo como função do deslocamento pretendido. Assim,

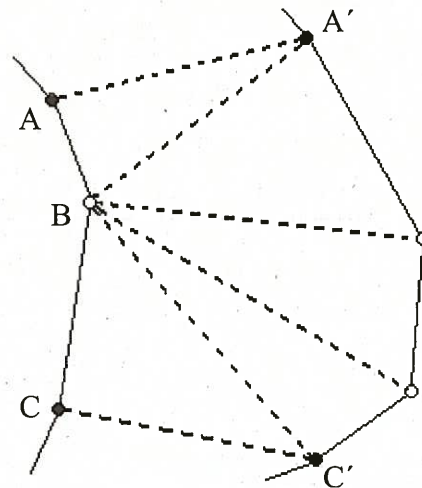


Fig 2: Solução adoptada para estimar as cargas a aplicar sobre os nodos não emparelhados.

tomou-se o deslocamento inicial como sendo dado por:

$$U^0(i) = c_u (X_{2,i} - X_{1,i}), \quad (52)$$

onde $U^0(i)$ representa a i -ésima componente do vector deslocamento inicial, $X_{1,i}$ são as coordenadas do i -ésimo nodo da forma j , e c_u é uma constante compreendida entre 0.0 e 1.0 (a especificar pelo utilizador da implementação da metodologia proposta). Mais uma vez, obedecendo a um critério de comodidade na especificação dos parâmetros de entrada da referida implementação, neste trabalho optou-se por utilizar o mesmo valor de c_u para todos os nodos.

De modo análogo, a velocidade inicial é calculada em função do deslocamento inicial da seguinte forma:

$$\dot{U}^0(i) = c_v U^0(i), \quad (53)$$

onde c_v é uma constante a definir pelo utilizador (pela razão já indicada, neste trabalho c_v foi igual para todos os nodos).

Contudo, a fórmula do deslocamento inicial, (52), não está definida para os nodos não emparelhados da forma final. A solução adoptada, atendendo a que esta mesma dificuldade foi ultrapassada de forma satisfatória no cálculo dos vectores de

cargas aplicadas para nodos não emparelhados, foi especificar o deslocamento inicial em função do vector de cargas inicial. Deste modo:

$$\begin{cases} U^0(i) = \frac{c_U}{k} R(i) & \text{se } k \neq 0 \\ U^0(i) = 0 & \text{se } k = 0 \end{cases}, \quad (54)$$

sendo possível verificar que (a menos que k seja nulo) o deslocamento inicial dos nodos emparelhados é idêntico ao que foi estipulado em (52). Com este procedimento, para cada nodo não emparelhado da forma inicial, o deslocamento inicial vai ser influenciado, tal como as cargas, pelos nodos da forma final que estão compreendidos entre os nodos que emparelham os adjacentes ao nodo não emparelhado. O peso atribuído a cada nodo da forma final para o vector de deslocamento inicial será igual ao que foi atribuído na constituição do vector de cargas para os nodos não emparelhados.

8. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O trabalho desenvolvido foi integrado numa plataforma genérica de desenvolvimento e ensaio de algoritmos de processamento, análise de imagem e computação gráfica (cuja apresentação detalhada pode ser encontrada em (Tavares, 2000, 2002)). Apresentaremos, de seguida alguns dos resultados experimentais obtidos, outros exemplos podem ser encontrados em (Pinho, 2002, 2003).

De salientar que todas as imagens

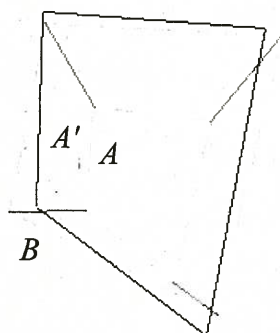


Fig 3: Emparelhamento modal dos contornos A e B , e resultado, A' , da aplicação da transformação rígida envolvida ao contorno inicial.

apresentadas incluem os nodos das formas inicial e objectivo (não ligados por segmentos de recta), e os resultados obtidos podem estar representados numa escala de cinzentos por intensidade das cargas aplicadas, ou pela intensidade da energia de deformação global ou local (unindo os nodos obtidos em cada iteração por segmentos de recta). Nas representações que se seguem, aos valores menos intensos (de forças ou energia) correspondem níveis mais escuros de cinzento.

Para determinar a paragem da resolução da equação dinâmica de Lagrange, pode ser utilizado um critério de equilíbrio, segundo o qual as cargas aplicadas tomam valores quase nulos (o que é equivalente, neste trabalho, a deslocamentos quase nulos entre iterações consecutivas), mas também pode ser utilizado um critério de proximidade, segundo o qual a paragem do processo resolutivo se dá quando é conseguida uma determinada aproximação da forma final. Este segundo critério reduz significativamente o número de iterações utilizadas, uma vez que se verificou experimentalmente que para intensidades de cargas adequadas, as formas intermédias que se vão obtendo aproximam-se adequadamente da forma final, sendo sempre necessárias muitas mais iterações quando é considerado o critério de equilíbrio.

Considerando o contorno inicial A e contorno objectivo B , e ainda o resultado, A' , da aplicação da transformação rígida estimada ao contorno inicial, representados na figura 3, é possível estimar isoladamente



Fig 4: Simulação apenas da componente não rígida da transformação, representada por intensidades das cargas aplicadas.

a componente não rígida da transformação global entre A e B (figura 4). Naturalmente, o número de iterações utilizado é menor do que se se estimasse toda a deformação existente entre A e B .

Na figura 5 encontram-se representados os contornos C (inicial) e D (objectivo), que têm todos os nodos emparelhados com êxito por Análise Modal. Pela figura 6, é possível notar que a energia de deformação global aumenta à medida que as formas estimadas se aproximam da forma objectivo, o que pode ser justificado por o deslocamento entre iterações ser cada vez maior.

Na figura 7 estão representadas as formas E (inicial) e F (objectivo), com 47 nodos emparelhados no total de 57, obtendo-se uma aproximação final (figura 8) a menos de 60 *pixels* (que corresponde uma aproximação média de cada nodo emparelhado a menos de 1.2 *pixels* do contorno final) da forma objectivo em 55 iterações se for utilizado o método de Newmark. Utilizando os métodos da Sobreposição de Modos com o Método de Newmark, quando se consideram a totalidade dos modos, obtém-se uma precisão análoga no mesmo número de iterações, contudo quando se reduz a percentagem de modos considerados, a precisão é afectada, conforme se pode ver pela figura 9 cuja 35ª iteração consiste numa aproximação do contorno objectivo a menos de 100 *pixels* (a que corresponde uma média de 2.1 *pixels* por cada nodo emparelhado). Mantendo as condições dos resultados apresentados, no Método da Diferença Central, o sistema diverge, uma vez que o passo de tempo utilizado

($\Delta t = 25$) é claramente superior ao passo de tempo crítico para este método. Pela análise da figura 10 é possível constatar, tal como foram estimadas, as cargas aplicadas são tanto mais intensas, quanto maior a distância à forma objectivo.

Considerando as representações G (inicial) e H (objectivo) de contornos reais em imagens do coração (Tavares, 2000), compostos por 70 nodos, dos quais 43 emparelhados conforme indicado na figura 11, pelo método de Newmark são necessárias 9 iterações até conseguir uma aproximação da forma objectivo a menos de 60 *pixels*, a que corresponde uma distância média de 1.4 *pixels* para cada nodo emparelhado (figuras 11 e 12). Quando se utiliza deslocamento inicial não-nulo, são necessárias menos iterações para atingir a precisão anterior (ver figura 14 para a qual foi utilizado $c_u = 0.2$ e o método convergiu em apenas 3 iterações).

Considerando as representações G (inicial) e H (objectivo) de contornos reais em imagens do coração (Tavares, 2000), compostos por 70 nodos, dos quais 43 emparelhados conforme indicado na figura 11, pelo método de Newmark são necessárias 9 iterações até conseguir uma aproximação da forma objectivo a menos de 60 *pixels*, a que corresponde uma distância média de 1.4 *pixels* para cada nodo emparelhado (figuras 11 e 12). Quando se utiliza deslocamento inicial não-nulo, são necessárias menos iterações para atingir a precisão anterior (ver figura 14 para a qual foi utilizado $c_u = 0.2$ e o método convergiu em apenas 3 iterações)



Fig 5: Emparelhamento entre os contornos C e D .

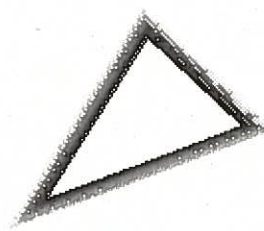


Fig 6: Formas intermédias entre C e D , representadas por intensidades de energia de deformação global.

Analisando as intensidades de cinzento das figuras 12 e 13, é possível notar-se que os valores da energia de deformação serão tanto maiores quanto maior o deslocamento obtido em cada iteração.

Considerando as formas *I* e *J* (também referentes a contornos reais), com 81 e 84 pixels respectivamente, dos quais 62 estão emparelhados com êxito (figura 15), quando se estimam os deslocamentos nodais por minimização da energia de

deformação, obtém-se resultados razoáveis, conforme se pode ver pela figura 16. Considerando ainda os contornos *I* e *J'*, representados na figura 17, cuja energia de deformação estimada pelo processo mencionado é de 28.3, enquanto que a estimativa dada para a figura 15 é de 4.5, verifica-se que a energia de deformação estimada traduz de forma aceitável a deformação existente.

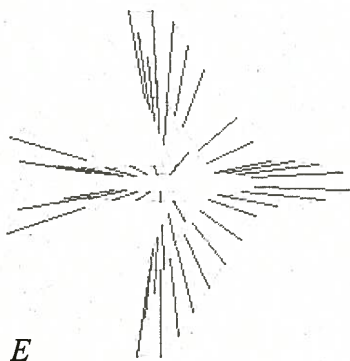


Fig 7: Emparelhamento entre os contornos *E* e *F*.



Fig 8: Resultado final obtido pelo Método de Newmark.



Fig 9: Resultado obtido pelo método de Sobreposição de Modos com o Método de Newmark quando se consideram 80% dos modos.

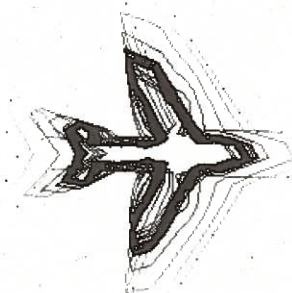


Fig 10: Formas intermédias representadas por intensidades de cargas aplicadas.



Fig 11: Emparelhamento entre os contornos *G* e *H*.



Fig 12: Resultados obtidos representados por energia de deformação local.



Fig 13: por energia de deformação global.

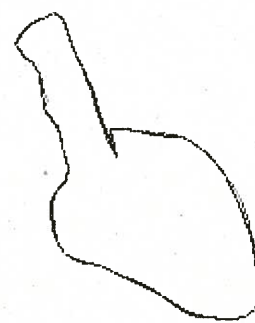


Fig 14: energia de deformação global quando se utiliza deslocamento inicial não nulo.



Fig 15: Emparelhamento entre os contornos I e J . (Energia de deformação global: 4.5.)



Fig 16: Deslocamentos nodais estimados pelo método de minimização de energia.

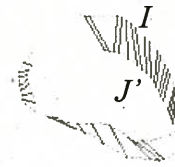


Fig 17: Emparelhamentos entre os contornos I e J' . (Energia de deformação global: 28.3.)

9. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos uma metodologia física para estimar temporalmente a transformação/deformação existente entre objectos representados em imagens. Assim, admitindo que as formas dadas são modeladas pelo elemento isoparamétrico de Sclaroff, e que foram estabelecidas algumas correspondências entre nodos por Análise Modal, utilizámos a resolução da equação dinâmica de equilíbrio para calcular o campo de deslocamentos. Desta forma, é também possível utilizar-se a energia de deformação global e local envolvidas na tradução da deformação estimada. Como tal, os resultados obtidos podem ser representados por intensidades das cargas aplicadas ou dos valores da energia de deformação global ou local envolvida (ou então com intensidades constantes especificadas pelo utilizador da implementação da metodologia proposta).

Para proceder à resolução da equação dinâmica de equilíbrio foi necessário estimar alguns parâmetros, como o deslocamento e velocidade iniciais, ou a intensidade das cargas aplicadas sobre os nodos emparelhados por Análise Modal. Também, no sentido de alargar o domínio de aplicabilidade resolução da equação de Lagrange a objectos cujos nodos não estejam todos emparelhados, estimamos a carga aplicada sobre cada nodo não emparelhado como uma força resultante, que consiste na média ponderada das forças que atraem esse ponto para os nodos da forma final, compreendidos entre os nodos que correspondem aos nodos emparelhados adjacentes a esse ponto (solução baseada no critério de vizinhança). Assim, afinando os

valores da constante global de rigidez, podem obter-se aproximações razoáveis da forma objectivo, mesmo quando os objectos dados não foram totalmente emparelhadas com sucesso.

Para se proceder à resolução da equação dinâmica de equilíbrio, conforme a apresentamos, torna-se necessário estimar o deslocamento e velocidade iniciais. A solução utilizada consiste em afectar as cargas iniciais aplicadas sobre cada nodo de uma constante para o deslocamento inicial. Do mesmo modo, a velocidade inicial é obtida ao afectar de outra constante o deslocamento inicial. Assim, notamos que a velocidade e deslocamento iniciais são factores que podem acelerar a resolução da equação dinâmica de equilíbrio, já que quanto maior o deslocamento ou velocidade iniciais, mais rápida será a aproximação à forma objectivo.

Neste artigo, também apresentamos uma solução para estimar apenas a componente não rígida associada à transformação global existente entre as formas dadas; tal solução, poderá ser útil em diversas aplicações da metodologia proposta.

Analisando a influência dos parâmetros envolvidos na metodologia apresentada, chegamos a conclusões que vão de encontro às expectativas intuitivas, o que é justificado pelo facto da referida metodologia se fundamentar em princípios físicos.

Aumentando os valores da constante global de rigidez, aumentam as intensidades das cargas aplicadas e, dos ensaios realizados, verificou-se que tal pode conduzir à aproximação mais rápida da forma objectivo, mas que também pode

levar à ruptura, caso atinja valores demasiado intensos.

Quanto aos valores da energia de deformação, global ou local, notamos que são proporcionais ao deslocamento estimado em cada iteração. Como tal, verificou-se que à medida que o sistema se desenvolve, aumenta a energia de deformação; contudo se sistema evoluir até ao estado de equilíbrio, verifica-se que a partir de uma determinada altura em que as formas intermédias estão muito próximas da forma objectivo, os deslocamentos são sucessivamente menores, com a consequente diminuição da energia de deformação.

Neste artigo, também se verificou que o valor da energia de deformação pode ser utilizado para comparar e reconhecer objectos de forma adequada. Outra utilização da energia de deformação, pode ser a estimativa dos deslocamentos nodais através de um processo de minimização do valor dessa energia.

Neste trabalho utilizou-se o amortecimento de Rayleigh e verificou-se que o mesmo contribui para que a evolução do sistema se faça mais lentamente. Essas diferenças são tanto mais visíveis, quanto mais rígido for o material virtual considerado para os objectos.

Quanto ao material virtual utilizado para modelar os objectos representados nas imagens dadas, notamos que, com excepção de alguns casos pontuais, o número de iterações utilizados até à paragem da resolução será tanto maior quanto maior for a densidade e o módulo de elasticidade, e que o número de iterações também aumenta à medida que o coeficiente de Poisson diminui.

Para modelar os objectos representados recorreremos ao elemento isoparamétrico de Sclaroff, cujo sigma Gaussiano das funções interpoladoras, controla a dependência entre os nodos de cada objecto (Tavares, 2000). Ao longo deste trabalho, verificou-se que quanto maior o valor deste parâmetro, maior a rigidez do elemento isoparamétrico e piores as aproximações conseguidas para

a imagem final através resolução da equação dinâmica de equilíbrio.

Quando comparados os resultados obtidos da resolução da equação dinâmica de equilíbrio através do método da Diferença Central, o método de Newmark ou o método da Sobreposição de Modos, notamos que, salvo raras excepções, todos os métodos obtiveram resultados análogos, a menos do método da Diferença Central (ao qual surgem limitações associadas ao passo de tempo crítico). O método da Sobreposição de Modos revelou ser mais vantajoso uma vez que permite a redução do custo computacional envolvido, contudo a precisão dos resultados obtidos é necessariamente afectada.

Uma vez que o trabalho apresentado apenas se refere a representações bidimensionais de objectos, no futuro o mesmo deve ser expandido para formas tridimensionais. Também no âmbito de trabalhos futuros, poder-se-ão implementar opções que permitam adequar, entre iterações, a intensidade das cargas aplicadas, assim como o passo de tempo utilizado. Ainda no que concerne a actividades futuras, pode ser considerado o refinamento dos vários parâmetros utilizados na aplicação desta metodologia a sequências de imagens.

A metodologia proposta neste artigo, também deverá ser no futuro alvo de aplicação em exemplos concretos e interessantes com a consequente validação.

9. REFERÊNCIAS

- (Bathe, 1996) Bathe, K., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, 1996.
- (Chapra, 1988) Chapra, S., Canale, R., *Numerical Methods For Engineers*, McGraw-Hill, 1988.
- (Cook, 1989) Cook, R., Malkus D., Plesha M., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Wiley, 1989.
- (Horn, 1987) Horn, B., *Closed-Form Solution of Absolute Orientation using Unit Quaternions*, Journal of the Optical Society America A., Vol.4, p.629/642, 1987.

- (Nastar, 1994) Nastar, C., *These pour le grade de Docteur: Modeles Physiques Deformables et Modes Vibratoires pour l'Analyse du Mouvement Non-Rigide dans les Images Multidimensionnelles*, L'École Nationale Des Ponts Et Chaussees, 1994.
- (Pinho, 2002) Pinho, R., *Dissertação de Mestrado: Determinação do Campo de Deslocamentos a partir de Imagens de Objectos Deformáveis*, FCUP, FEUP, Universidade do Porto, 2002.
- (Pinho, 2003) Pinho, R., Tavares, J., *Resolução da Equação de Equilíbrio entre Imagens de Objectos Deformáveis*, VII Congresso de Mecânica Aplicada e Computacional, Universidade de Évora, 2003.
- (http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/Raquel%20Pinho_VIICMAC.pdf)
- (Press, 1992) Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., Flannery, B., *Numerical Recipes In C - The Art Of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1992.
- (Sclaroff, 1995) Sclaroff, S., *PhD Thesis: Modal Matching: A Method for Describing, Comparing, and Manipulating Digital Signals*, MIT, 1995.
- (Tavares, 2000) Tavares, J., *Tese de Doutoramento: Análise de Movimento de Corpos Deformáveis usando Visão Computacional*, FEUP, 2000.
- (<http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/teses/tese%20phd.zip>)
- (Tavares, 2000a) Tavares, J., Barbosa, J., Padilha, A., *Determinação de Correspondência entre Modelos de Contorno e de Superfície, utilizando Modelização por Elementos Finitos e Análise Modal, em Visão por Computador*, VI Congresso Nacional de Mecânica Aplicada e Computacional, Aveiro, 2000.
- (<http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/artigo%20vicnmac.pdf>)
- (Tavares, 2000b) Tavares, J., Barbosa, J., Padilha, A., *Determinação de Correspondência entre Objectos utilizando Modelação Física*, 9º Encontro Português de Computação Gráfica, Marinha Grande, 2000.
- (<http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/artigo%209epcg.pdf>)
- (Tavares, 2002) Tavares, J., Barbosa, J., Padilha, A., *Apresentação de um Banco de Desenvolvimento e Ensaio para Objectos Deformáveis*, RESI – Revista Electrónica de Sistemas de Informação – ISSN: 1677 – 3071 (<http://www.presidentekennedy.br/resi/>), Edição 1: Volume 01 - Nº 01 - Novembro de 2002.
- (http://www.fe.up.pt/~tavares/downloads/publications/artigos/banco_resi.pdf)

