

# DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA INTENSIDADE ESTRUTURAL EM VIGAS

H. Reis Lopes<sup>1</sup>, J. Dias Rodrigues<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ESTiG/IPB - Instituto Politécnico de Bragança

<sup>2</sup>FEUP - Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



## RESUMO

*Na análise dinâmica das estruturas, o conceito de intensidade estrutural caracteriza o fluxo de potência numa estrutura em vibração. A sua aplicação revela-se de grande importância para a redução do nível de vibração [1, 2, 3]. A intensidade estrutural representa a distribuição do fluxo de potência transferida entre a fonte e o absorvedor de energia através de um meio condutor, a estrutura, onde o fluxo de potência ocorre por propagação de ondas elásticas. O divergente da intensidade estrutural permite localizar as fontes e absorvedores de energia na estrutura. A intensidade estrutural é composta por duas componentes, a intensidade activa que representa a potência média absorvida pelo sistema, e a intensidade reactiva que representa a potência que circula entre a estrutura e a fonte, não sendo consumida pelo movimento vibratório. Neste trabalho, apresenta-se uma metodologia de determinação da intensidade estrutural por via experimental com base no campo de velocidade e/ou aceleração medido em regime harmónico estacionário. A partir deste, determina-se o campo de deslocamento por integração no tempo e os campos de esforços internos por derivação espacial do campo de deslocamentos. Com base nestas grandezas determina-se a intensidade estrutural e, por derivação espacial, o respectivo divergente.*

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo do fluxo de potência vibratória teve início no final da década de 60 com o aparecimento do trabalho publicado por Noiseux [1]. A formulação apresentada e designada de intensidade estrutural é originária da área da acústica, onde é utilizada para identificar as fontes e o fluxo de potência acústica. De forma análoga, o conceito de intensidade estrutural é aplicado às estruturas para identificar o percurso da potência vibratória entre as fontes e os dissipadores de energia, e o seu

divergente permite identificar a localização das fontes e dos dissipadores na estrutura. É neste contexto que a intensidade estrutural pode desempenhar um papel primordial na análise dinâmica de estruturas, caracterizando o fluxo da energia e a sua trajectória, e identificando as fontes e os dissipadores numa estrutura em vibração. O seu conhecimento reveste-se de grande importância, pois permite actuar de modo eficaz sobre a distribuição do fluxo de energia numa estrutura em vibração, quer alterando a sua

trajectória, ou através da sua dissipação por tratamentos superficiais passivos. Assim, por exemplo, podem desenvolver-se soluções de isolamento de vibrações por aplicação de dissipadores em regiões próximas das fontes de energia identificadas e de acordo com o trajecto da energia vibratória.

No início da década de 80 surgiram os primeiros resultados experimentais sobre o fluxo de potência em vigas e placas [4]. Desde então, tem-se assistido a uma permanente evolução ao nível da experimentação, impulsionada pelas novas técnicas de medição sem contacto, como são os casos da vibrometria "laser" para a medição pontual e da holografia digital para as medições de campo.

## 2. INTENSIDADE ESTRUTURAL

A intensidade estrutural é uma grandeza vectorial que representa a distribuição do fluxo de potência transferida entre a fonte e o absorvor, através de um meio condutor, onde o fluxo de potência ocorre por propagação de ondas elásticas na estrutura. A intensidade estrutural instantânea, dependente do tempo, caracteriza o fluxo de potência numa estrutura através da direcção, do sentido e da intensidade. O vector da intensidade estrutural instantânea define-se pelo produto entre o tensor das tensões e o vector velocidade, de acordo com a expressão [5, 6]:

$$i(t) = -\sigma \cdot \dot{v} = - \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Na figura 1 pode observar-se, para um elemento infinitesimal de material isotrópico e elástico de um meio contínuo, as componentes do tensor, do vector velocidade e do vector da intensidade estrutural, as quais, de acordo com a expressão (1), estão orientadas no sentido positivo.

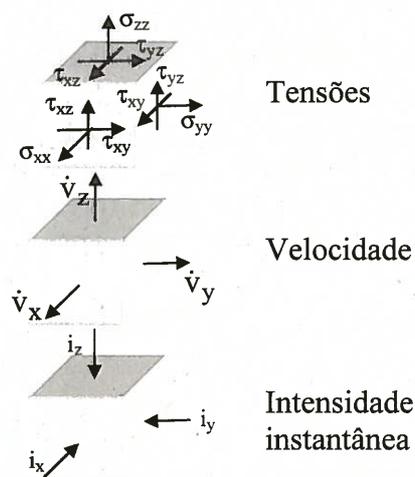


Fig 1- Representação das componentes do tensor das tensões, da velocidade e da intensidade estrutural instantânea.

### 2.1 Intensidade estrutural em notação complexa

Uma outra forma de abordar o estudo da intensidade estrutural é através da sua representação no domínio da frequência recorrendo à notação complexa. A partir da definição de intensidade estrutural média:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (2)$$

e aplicando a forma fasorial de amplitude e fase, a intensidade estrutural em notação complexa escreve-se:

$$\tilde{\Pi}(\omega) = -\frac{1}{2} \tilde{\sigma}(\omega) \tilde{v}^*(\omega) \quad (3)$$

A intensidade em notação complexa pode ainda exprimir-se pelas suas componentes real e imaginária:

$$\tilde{\Pi}(\omega) = I(\omega) + jJ(\omega) \quad (4)$$

A parte real  $I(\omega)$  representa o fluxo de potência activa por unidade de área, a qual é designada por intensidade activa. Por sua vez, a parte imaginária  $J(\omega)$  representa a potência reactiva por unidade de área e é designada de intensidade reactiva.

## 2.2 Divergente da intensidade estrutural

O divergente da função intensidade estrutural permite identificar a localização das fontes e absorvedores de energia através dos máximos e dos mínimos da função, respectivamente. Genericamente, o divergente da intensidade estrutural é definido pela seguinte expressão:

$$\text{div}I = \nabla I = \frac{\partial I_x}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial I_y}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial I_z}{\partial z} \bar{k} \quad (5)$$

## 3. INTENSIDADE ESTRUTURAL EM VIGAS

No caso das vigas, que são estruturas unidimensionais, considera-se uma única direcção de propagação de energia, a direcção axial  $x$ . A formulação apresentada refere-se às vigas finas, cujo comportamento assenta na teoria de Euler-Bernoulli, sendo a sollicitação considerada estacionária harmónica de frequência  $\omega$ .

A partir da definição da intensidade estrutural, é necessário conhecer a distribuição das tensões e da velocidade em cada secção recta ao longo da viga. Porém, as tensões estão directamente relacionadas com os esforços internos da viga pela teoria da elasticidade. Assim, a intensidade estrutural na viga é o resultado da contribuição da intensidade estrutural produzida por cada um dos dois tipos de esforços internos, momento flector e esforço de corte, aos quais estão associados, respectivamente, o movimento de rotação e de translação da secção recta. Para uma dada frequência  $\omega$ , e de acordo com a expressão (3), a distribuição longitudinal da intensidade estrutural em vigas escreve-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_x(x) &= -\frac{1}{2} \tilde{M}_z(x) \dot{\tilde{\theta}}_z^*(x) - \frac{1}{2} \tilde{Q}_y(x) \dot{\tilde{v}}^*(x) \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \tilde{M}_z(x) \dot{\tilde{\theta}}_z^*(x) + \tilde{Q}_y(x) \dot{\tilde{v}}^*(x) \right] \end{aligned} \quad (6)$$

onde  $\dot{\tilde{v}}^*(x)$  e  $\dot{\tilde{\theta}}_z^*(x)$  representam, respectivamente, o complexo conjugado da

velocidade transversal e o complexo conjugado da velocidade de rotação da secção recta.

Como a intensidade activa e reactiva são definidas, respectivamente, pela componente real e imaginária da intensidade estrutural, a intensidade activa  $I_x(x)$  é dada pela seguinte expressão:

$$I_x(x) = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[ j\omega \left( \tilde{M}_z(x) \tilde{\theta}_z^*(x) + \tilde{Q}_y(x) \tilde{v}^*(x) \right) \right] \quad (7)$$

e a intensidade reactiva  $J_x(x)$  por:

$$J_x(x) = -\frac{1}{2} \text{Im} \left[ j\omega \left( \tilde{M}_z(x) \tilde{\theta}_z^*(x) + \tilde{Q}_y(x) \tilde{v}^*(x) \right) \right] \quad (8)$$

De acordo com a teoria de Euler-Bernoulli das vigas, os esforços  $\tilde{M}_z(x)$  e  $\tilde{Q}_y(x)$  e a rotação  $\tilde{\theta}_z(x)$  da secção recta podem exprimir-se unicamente a partir do deslocamento transversal da secção recta da viga. Assim, e após a respectiva substituição, podem rescrever-se as expressões da intensidade estrutural em função do campo de deslocamento  $\tilde{v}(x)$  e das suas derivadas espaciais, da frequência de vibração  $\omega$  e da rigidez à flexão  $EI$  da viga na seguinte forma:

$$I_x(x) = -\frac{\omega EI}{2} \text{Im} \left[ \frac{d^2 \tilde{v}(x)}{dx^2} \frac{d\tilde{v}^*(x)}{dx} - \frac{d^3 \tilde{v}(x)}{dx^3} \tilde{v}^*(x) \right] \quad (9)$$

$$J_x(x) = \frac{\omega EI}{2} \text{Re} \left[ \frac{d^2 \tilde{v}(x)}{dx^2} \frac{d\tilde{v}^*(x)}{dx} - \frac{d^3 \tilde{v}(x)}{dx^3} \tilde{v}^*(x) \right] \quad (10)$$

As duas expressões anteriores permitem determinar a intensidade estrutural com base no campo de deslocamento transversal e nas suas derivadas espaciais.

#### 4. INTENSIDADE ESTRUTURAL EM VIGAS POR VIA EXPERIMENTAL

De acordo com o formalismo apresentado, a intensidade estrutural não é uma grandeza directamente acessível pela medição experimental, já que resulta do produto entre os esforços internos e as velocidades que lhe estão associadas, expressões (7 e 8). No entanto, os campos de deslocamento e/ou velocidade de deslocamento podem ser directamente medidos, sendo os campos de rotação e/ou velocidade de rotação determinados, normalmente, de forma indirecta. De forma idêntica, os esforços internos são obtidos de uma forma indirecta, a partir da medição do campo de deslocamentos e/ou deformações, por recurso às equações da elasticidade. Assim, o procedimento desenvolvido para a determinação da intensidade estrutural por via experimental assenta na medição do campo de deslocamentos e/ou velocidades de deslocamento, e, a partir deste, na obtenção dos campos de rotação, velocidade de rotação, momento flector e esforço transversal por derivação espacial do campo medido em regime estacionário harmónico.

Os ensaios experimentais realizados consistiram na medição pontual da velocidade ou aceleração transversal, na forma de amplitude e fase, à frequência fixa de excitação. Após medição em todos os pontos de uma malha pré-definida para as vigas em estudo, os campos medidos são integrados em ordem à variável tempo de forma a obter o respectivo campo complexo de deslocamento  $\tilde{v}(x)$ . Para uma frequência fixa de excitação  $\omega$ , o campo de resposta em deslocamento relaciona-se com o respectivo campo de velocidades e de acelerações de acordo com a expressão,

$$\tilde{v}(x) = \frac{\dot{\tilde{v}}(x)}{j\omega} = -\frac{\ddot{\tilde{v}}(x)}{\omega^2} \quad (11)$$

Para obter o campo de rotações e dos esforços internos, por derivação do campo de deslocamentos em ordem à variável

espacial, foram utilizadas duas técnicas de cálculo da derivada espacial: um método de diferenças finitas modificado e o método da aproximação polinomial.

A adopção destas técnicas na derivação espacial do campo de deslocamentos para determinação da intensidade estrutural justifica-se pela sua simplicidade de implementação e pela modificação introduzida na técnica das diferenças finitas.

Para a validação da metodologia de cálculo e da sua implementação em MATLAB, procedeu-se à determinação e análise da intensidade estrutural numa viga simplesmente apoiada, com base num campo de deslocamentos gerado analiticamente, comparando a solução obtida com a solução analítica.

##### 4.1 Método das diferenças finitas modificado

O método das diferenças finitas centrais modificado difere do método corrente na medida em que o campo de deslocamentos é previamente filtrado no domínio do número de onda e “espelhado” nas extremidades da viga. O filtro é aplicado no domínio do número de onda e o campo de deslocamentos filtrado é calculado de acordo com a expressão:

$$\tilde{V}_F(x) = F^{-1}(\text{filtro} * F(\tilde{v}(x))) \quad (12)$$

onde  $F$  e  $F^{-1}$  representam, respectivamente, a transformada directa e inversa de Fourier.

Por aplicação do método das diferenças finitas centrais ao campo de deslocamentos filtrado, são determinados a rotação da secção recta da viga e os esforços, momento flector e esforço de corte, que resultam da primeira, segunda e terceira derivada espacial, respectivamente.

Aplicando o método das diferenças finitas centrais, em cada secção recta da viga tem-se:

$$\frac{d\tilde{V}_F(x_i)}{dx} = \frac{\tilde{V}_F(x_{i+1}) - \tilde{V}_F(x_{i-1}))}{2\Delta x} \quad (13)$$

$$\frac{d^2 \tilde{V}_F(x_i)}{dx^2} = \frac{\tilde{V}_F(x_{i+1}) - 2\tilde{V}_F(x_i) + \tilde{V}_F(x_{i-1}))}{\Delta x^2} \quad (14)$$

$$\frac{d^3 \tilde{V}_F(x_i)}{dx^3} = \frac{\tilde{V}_F(x_{i+2}) - 3\tilde{V}_F(x_{i+1}) + 3\tilde{V}_F(x_{i-1}) - \tilde{V}_F(x_{i-2}))}{2\Delta x^3} \quad (15)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$ , onde  $i$  representa a secção recta da viga,  $\Delta x$  o passo e  $N$  o número de pontos de discretização da viga.

Nas figuras 2-4 apresenta-se uma comparação entre o fluxo de potência obtido pela solução analítica e utilizando a técnica das diferenças finitas modificada.

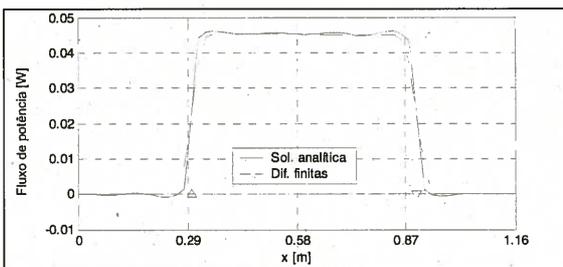


Fig 2 - Fluxo de potência: solução analítica e determinação pelo método das diferenças finitas modificado.

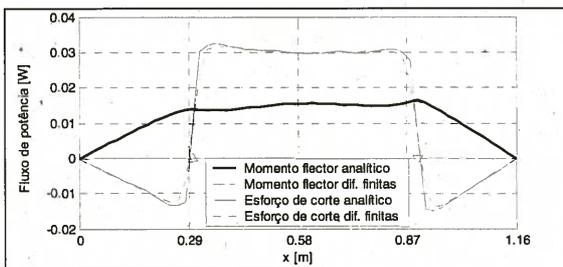


Fig 3 - Componentes do fluxo de potência: solução analítica e determinação pelo método das diferenças finitas modificado.

A análise comparativa valida a metodologia assim como a sua implementação. No entanto, verifica-se um desvio no fluxo de potência, figura 2, que se justifica, basicamente, pelo desvio asso-

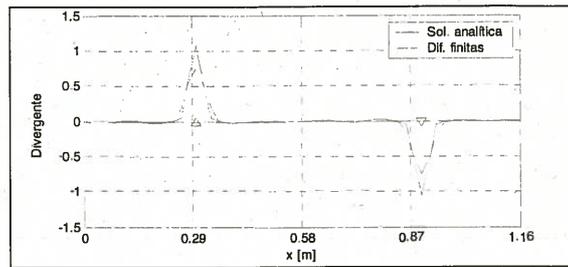


Fig 4 - Divergente do fluxo de potência: solução analítica e determinação pelo método das diferenças finitas modificado.

ciado à componente devida ao esforço de corte, figura 3. Com efeito, na determinação do esforço de corte, envolvendo a terceira derivada espacial, é expectável que se manifeste o efeito da propagação de erro associado ao método das diferenças finitas. Porém, o divergente identifica claramente a localização da fonte e do amortecedor.

#### 4.2 Aproximação polinomial

Nesta técnica, o campo de deslocamentos medido é aproximado pela função polinomial de grau  $n$ :

$$\tilde{V}(x) = A_n x^n + \dots + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \quad (16)$$

cujos coeficientes são determinados por ajuste ao campo de deslocamentos medido. Desta forma, os campos de rotação, momento flector e esforço de corte determinam-se pelas derivadas espaciais de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente, do polinómio ajustado.

$$\frac{d\tilde{V}(x)}{dx} = nA_n x^{n-1} + \dots + 3A_3 x^2 + 2A_2 x^1 + A_1 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 \tilde{V}(x)}{dx^2} = n(n-1)A_n x^{n-2} + \dots + 6A_3 x^1 + 2A_2 \quad (18)$$

$$\frac{d^3 \tilde{V}(x)}{dx^3} = n(n-1)(n-2)A_n x^{n-3} + \dots + 24A_4 x^1 + 6A_3 \quad (19)$$

Nas figuras 5-7 apresenta-se uma comparação entre a solução analítica e a determinada pelo método da aproximação polinomial. Neste caso, o desvio da distribuição do fluxo de potência em relação à solução analítica é mais significativo que no método das diferenças finitas modificado. A análise da figura 6 mostra que, também neste caso, é a componente devida ao esforço de corte que mais se afasta da solução analítica, ao contrário da componente devida ao momento flector que apresenta uma boa concordância. Em consequência, a propagação de erro atinge o divergente, figura 7, que, no entanto, permite ainda localizar a fonte e o amortecedor.

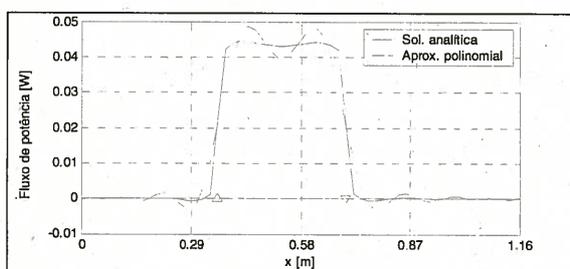


Fig 5 - Fluxo de potência: solução analítica e determinação pelo método da aproximação polinomial.

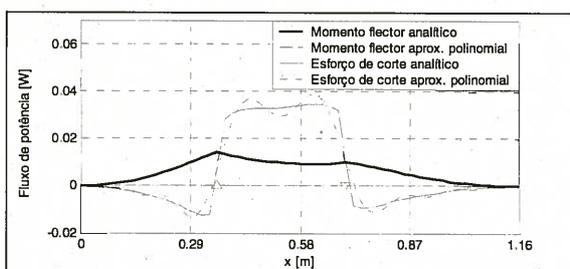


Fig 6- Componentes do fluxo de potência: solução analítica e determinação pelo método da aproximação polinomial.

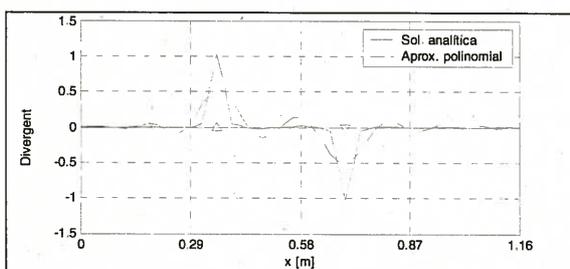


Fig 7 - Divergente do fluxo de potência: solução analítica e determinação pelo método da aproximação polinomial.

## 5. MONTAGEM EXPERIMENTAL

No âmbito da análise experimental são analisados dois sistemas, uma viga simplesmente apoiada e uma viga bi-encastada. De seguida apresenta-se uma descrição da montagem experimental assim como do equipamento de medição utilizado.

A montagem das vigas foi realizada sobre uma base de apoio materializada por uma mesa anti-vibratória. Em ambas as montagens houve o cuidado de garantir uma elevada rigidez da estrutura de suporte de modo a evitar perturbações externas.

### 5.1 Apoios

Para realizar a condição da viga simplesmente apoiada, a viga foi montada sobre uma articulação plana e uma articulação simples. As articulações foram materializadas através de eixos em material compósito, aos quais foi efectuado um pequeno entalhe de modo a garantir que o plano neutro da viga coincidissem com o eixo de rotação do apoio.

Os eixos, através da superfície do entalhe, foram colados nas extremidades da viga e montados em rolamentos de agulhas. Para o apoio duplo, os rolamentos foram fixos a elementos estruturais que lhes conferem restrição de movimento em translação nas direcções ortogonais ao eixo de apoio; quanto ao apoio simples, a restrição ocorre segundo a direcção transversal da viga, podendo esta mover-se segundo a direcção longitudinal.

No que concerne à montagem da viga correspondente à condição de bi-encastada, utilizaram-se suportes rígidos que restringem qualquer tipo de movimento, translação e/ou rotação.

### 5.2 Excitação

A excitação das vigas foi realizada por intermédio de um excitador electromagnético da marca LDS<sup>®</sup>. Este foi colocado suspenso numa estrutura tipo pórtico, através de cabos de ligação, com o intuito de facultar graus de liberdade ao

sistema de excitação. A ligação entre o excitador e a viga consistiu na utilização de uma haste suficientemente flexível para não introduzir na excitação momentos flectores.

### 5.3 Transdutores e analisador dinâmico de sinal

Como equipamento de análise da força de excitação e da resposta utilizou-se o analisador dinâmico de sinal de dois canais Hewlett Packard modelo 35665A.

Para medir a força dinâmica aplicada foi utilizado o transdutor de força Dytran, modelo 1051V3.

A resposta dinâmica foi medida utilizando um transdutor "laser", Polytec Laser Vibrometer modelo OFV-3001, e um acelerómetro piezoeléctrico da Brüel & Kjær, modelo OrthoShear 4507.

### 5.3 Absorsor

O elemento absorsor com a função de dissipar energia do sistema foi implementado através de um amortecedor externo acoplado às vigas. Utilizaram-se dois tipos de amortecedores, funcionando um deles com ar (Airpot®) e outro com óleo (Beswick).

Na extremidade da haste dos amortecedores foi montada uma ligação articulada de modo a evitar momentos reactivos e garantir a aplicação de uma força de amortecimento pontual.

A calibração dos amortecedores foi efectuada com base num sistema com um grau de liberdade, donde se obtiveram os coeficientes de amortecimento viscoso equivalente para um conjunto de frequências consideradas relevantes para o desenvolvimento deste trabalho (7 Hz, 15 Hz, 25 Hz e 60 Hz).

**Tabela 1-** Coeficiente de amortecimento viscoso equivalente [Ns/m] dos amortecedores.

Modelo	7Hz	15Hz	25Hz	60Hz
Airpot 160A	7.3	4.2	4.0	6.7
Airpot 325A	75.8	35.9	11.5	5.5
Beswick MHD-1-018	463	85.6	53.6	59.6

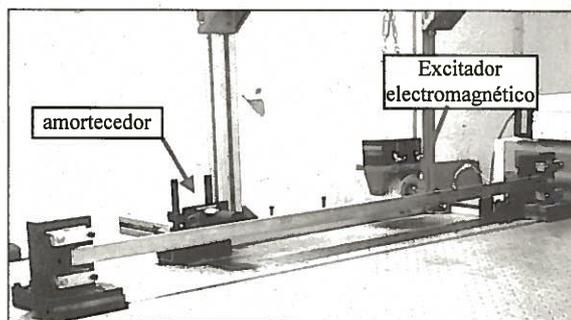
## 6. DETERMINAÇÃO EXPERIMENTAL DA INTENSIDADE ESTRUTURAL

Os ensaios experimentais consistiram, basicamente, na medição da força harmónica aplicada e na medição da resposta pontual, em termos da velocidade ou aceleração, na forma de amplitude e fase, à frequência fixa de excitação. Como tratamento da informação medida, os campos de resposta são integrados em ordem à variável tempo por forma a obter o campo de deslocamentos, a partir do qual se determina a intensidade estrutural ou fluxo de potência e o respectivo divergente.

Os modelos ensaiados são vigas em aço inoxidável AISI 304 com comprimento  $L=116$  mm, largura  $b=30$  mm e espessura  $h=5$  mm. Em ambas as montagens as vigas foram discretizadas em 59 pontos de medição com espaçamento igual a 20 mm. O excitador electromagnético constitui a fonte de energia e o amortecedor externo acoplado às vigas o elemento absorsor.

### 6.1 Viga simplesmente apoiada

No intuito de determinar e analisar a intensidade estrutural ou fluxo de potência na viga simplesmente apoiada, a fonte de excitação, o excitador electromagnético, foi colocada na secção de coordenada  $x_p=300$  mm, e o absorsor de energia, o amortecedor, foi posicionado na secção  $x_c=800$  mm, conforme se mostra na figura 8.



**Fig 8 -** Montagem da viga simplesmente apoiada.

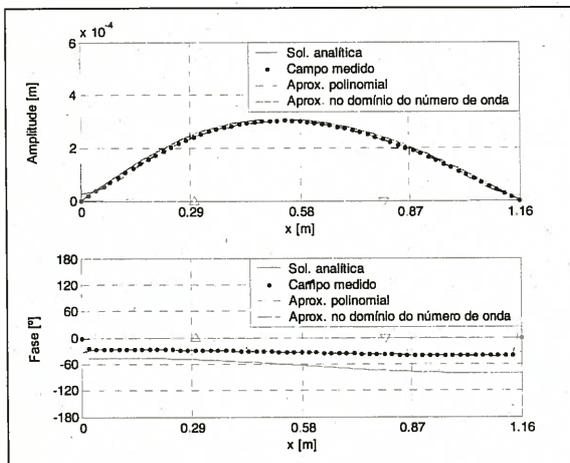
Para esta configuração da viga simplesmente apoiada foram realizados três ensaios a uma frequência de excitação de 7 Hz, modificando o coeficiente de amortecimento externo por troca dos amortecedores.

**Tabela 2** - Parâmetros de ensaio na análise da viga simplesmente apoiada.

Ensaio	Força [N]	Campo Medido	amortecedor
I	1	Velocidade	Airpot 325A
II	1	Velocidade	Airpot 160A
III	1	Deformação	Airpot 160A

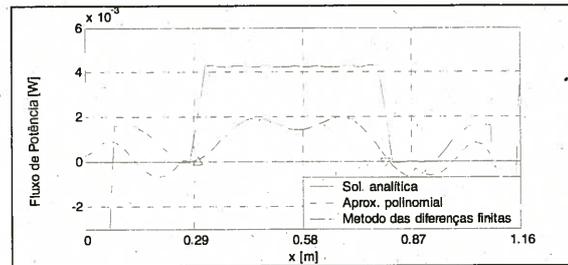
### 6.1.1 Ensaio I – Análise e discussão de resultados

Na figura 9 estão representados, em amplitude e fase, o campo de deslocamentos medido, o campo de deslocamentos analítico, e ainda a aproximação polinomial e a aproximação após filtragem no domínio do número de onda para o campo de deslocamentos medido. Verifica-se existir uma boa concordância entre os valores experimentais e os valores obtidos pela solução analítica, apesar de um pequeno desvio na fase. Refira-se, igualmente, a boa concordância entre o campo de deslocamentos medido e a aproximação polinomial e a aproximação com filtragem. No entanto, são de salientar os desvios observáveis ao nível dos apoios, quer para a amplitude quer para a fase.



**Fig 9** - Campo de deslocamentos com o amortecedor modelo Airpot 325A.

Com base no campo de deslocamentos medido procedeu-se de seguida à determinação do fluxo de potência. Na figura 10 está representado o fluxo de potência obtido pela aproximação polinomial e pelo método das diferenças finitas modificado com filtragem no domínio do número de onda, e ainda o obtido a partir do modelo analítico.



**Fig 10** - Campo de intensidade activa na viga simplesmente apoiada com o amortecedor modelo Airpot 325A.

Na região da viga compreendida entre a excitação e o amortecedor, o fluxo de potência do modelo experimental apresenta uma configuração similar da prevista pelo modelo teórico. Refira-se também que, nesta região, o resultado fornecido pelas duas técnicas utilizadas é idêntico. Porém, nas extremidades da viga, junto dos apoios, o resultado do modelo experimental desvia-se do modelo teórico, o que neste caso dificulta a identificação da localização da excitação e do amortecedor. Este desvio resulta das perturbações no campo de deslocamentos referidas anteriormente e visíveis na figura 9.

### 6.1.2 Ensaio II – Análise e discussão de resultados

Na figura 11 encontra-se representado, sob a forma de amplitude e fase, o campo de deslocamentos analítico e o medido, assim como as aproximações polinomial e por filtragem do campo de deslocamentos medido.

Neste caso, pode observar-se uma boa concordância entre os campos de deslocamentos analítico e medido, e uma boa qualidade da aproximação global, quer para a interpolação polinomial quer para a filtragem no domínio do número de onda.

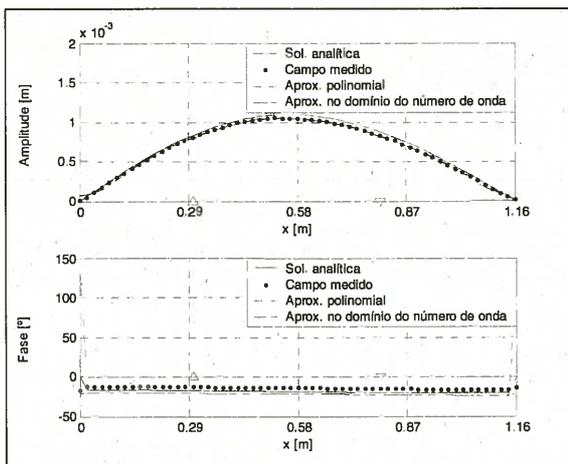


Fig 11 - Campo de deslocamentos na viga simplesmente apoiada com o amortecedor modelo Airpot 160A.

Porém, é notório um ligeiro desvio junto dos apoios.

Apesar de neste ensaio se verificar, globalmente, uma boa concordância para o campo de deslocamentos, os resultados obtidos para o fluxo de potência ou intensidade activa, apresentados na figura 12, não traduzem a distribuição correcta desta grandeza ao longo da viga.

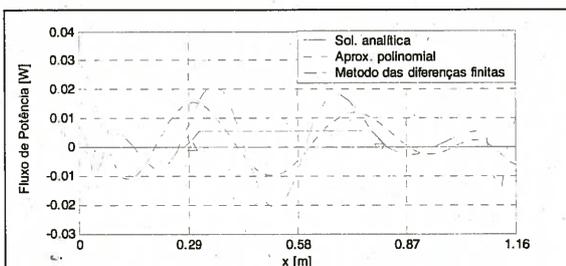


Fig 12 - Campo de intensidade activa na viga simplesmente apoiada com o amortecedor modelo Airpot 160A.

Na tentativa de compreender e esclarecer os resultados obtidos neste ensaio para o fluxo de potência, e contornar as dificuldades inerentes ao cálculo das derivadas espaciais do campo de deslocamentos, definiu-se o Ensaio III.

### 6.1.3 Ensaio III – Análise e discussão de resultados

Este ensaio consiste na determinação do campo de intensidade a partir do campo de deslocamentos medido no Ensaio II, e do campo de momentos flectores obtido a partir da medição do campo de deformações neste Ensaio III. Assim, a determinação da intensidade estrutural envolve apenas uma derivação espacial de ordem 1.

Para realizar este ensaio procedeu-se à instrumentação da viga simplesmente apoiada através da colocação de onze extensómetros eléctricos igualmente espaçados, figura 13.

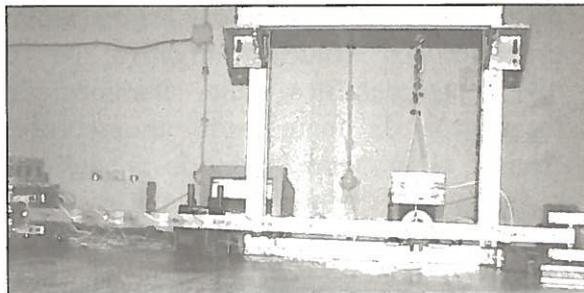


Fig 13 - Viga simplesmente apoiada instrumentada com onze extensómetros eléctricos.

Aplicando o método das diferenças finitas modificado ao campo de deslocamentos medido no Ensaio II e ao campo de momentos flectores medido neste Ensaio III, obteve-se, respectivamente, o campo de rotações e o campo do esforço de corte efectuando apenas uma derivação espacial. Com base nestes valores procedeu-se então ao cálculo da intensidade estrutural e do seu divergente, cujos resultados se apresentam nas figuras 14 e 15.

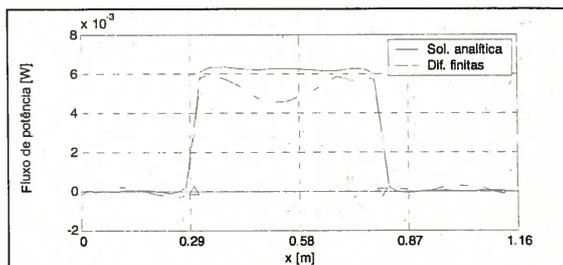


Fig 14 - Intensidade activa da viga simplesmente apoiada por diferenças finitas.

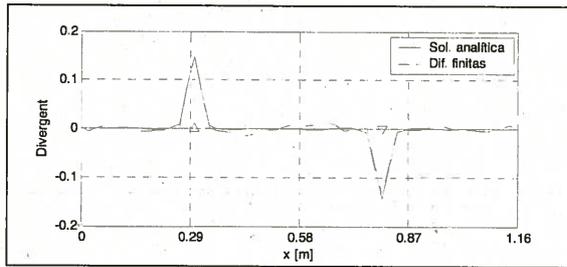


Fig 15 - Divergente da intensidade activa da viga simplesmente apoiada por diferenças finitas.

A análise destes resultados revela uma melhoria muito significativa em relação aos resultados do Ensaio II, e ainda uma boa concordância entre os resultados deste ensaio experimental combinado e os analíticos. A distribuição do fluxo de potência apresenta um andamento muito próximo da solução analítica, e o divergente identifica muito claramente a localização da fonte e do amortecedor. Aliás, observando individualmente as componentes da intensidade que resultam do momento flector e da rotação, e do esforço de corte e do deslocamento, estas revelam igualmente uma boa concordância com a solução analítica, figura 16.

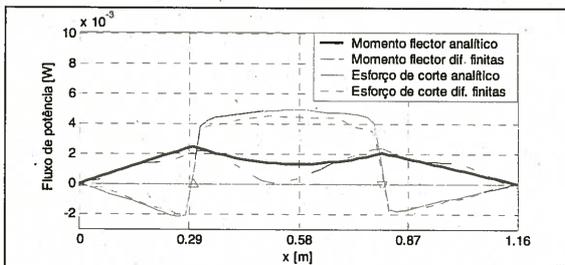


Fig 16 - Viga simplesmente apoiada instrumentada com onze extensómetros eléctricos.

A aplicação da metodologia da aproximação polinomial conduziu, igualmente, a uma melhoria substancial dos resultados em relação ao Ensaio II. Nas figuras 17 e 18 apresenta-se a intensidade e o respectivo divergente.

## 6.2 Viga bi-encastrada

A montagem utilizada para a viga bi-encastrada está representada na figura 19, onde é visível a localização da excitação e do amortecedor. A excitação foi aplicada

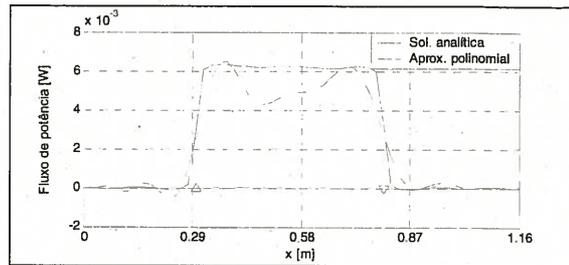


Fig 17 - Intensidade activa da viga simplesmente apoiada por aproximação polinomial.

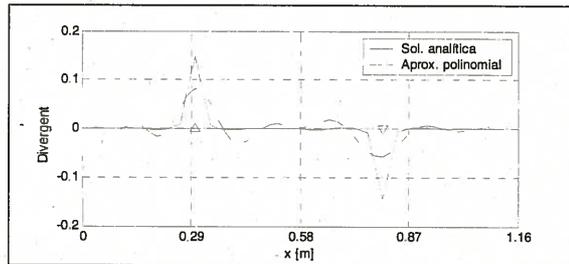


Fig 18 - Divergente da intensidade activa da viga simplesmente apoiada por aproximação polinomial.

na secção  $x_p=360$  mm, e o amortecedor a óleo na secção  $x_c=700$  mm. Devido à rigidez deste modelo, optou-se por utilizar o amortecedor de óleo.

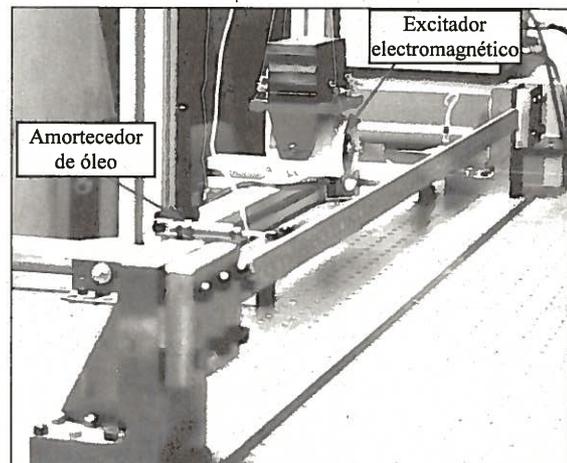


Fig 19- Montagem da viga bi-encastrada.

No estudo da viga bi-encastrada realizaram-se três ensaios a diferentes frequências. Como frequências de excitação seleccionaram-se as frequências de 15 Hz, inferior à primeira frequência natural, 25 Hz, entre a primeira e a segunda frequência natural, e 60 Hz, entre a segunda e a terceira. Para o conjunto de testes realizados, as condições de ensaio estão apresentadas na tabela 3.

**Tabela 3** - Parâmetros de ensaio na análise da viga bi-encastrada.

Ensaio	Força [N]	Frequência de excitação [Hz]	Tipo de transductor
I	1	15	vibrómetro laser
II	1	25	vibrómetro laser
III	1	60	acelerómetro piezoeléctrico

Aos campos de resposta medidos, depois de integrados em ordem ao tempo, foram aplicadas as duas metodologias de determinação experimental da intensidade estrutural, cuja análise e resultados se discutem a seguir para as três frequências de estudo.

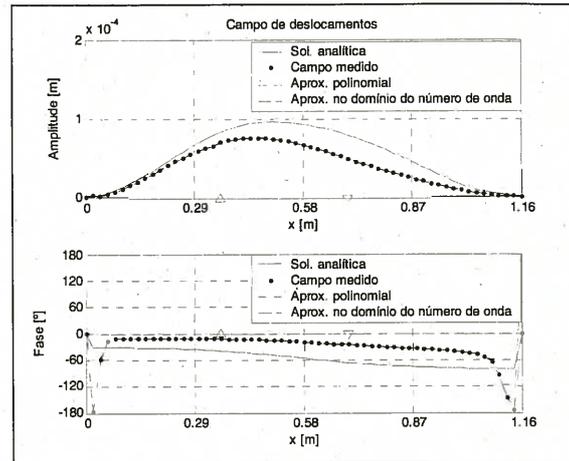
### 6.2.1 Ensaio I - Análise e discussão de resultados

Para o ensaio realizado à frequência de 15 Hz, apresenta-se na figura 20 a amplitude e fase de vibração, e na figura 21 o fluxo de potência do modelo analítico e o determinado pelo método das diferenças finitas modificado e pela aproximação polinomial. A distribuição da intensidade ao longo da viga revela resultados idênticos para ambos os modelos experimentais, embora com um desvio em relação ao modelo analítico. Porém, verifica-se também que, nos modelos experimentais, o fluxo de potência é inferior ao teórico. Este aspecto poderá dever-se ao facto do amortecedor, a 15 Hz, introduzir alguma rigidez no sistema, o que aparentemente é confirmado pela menor amplitude de vibração, figura 20.

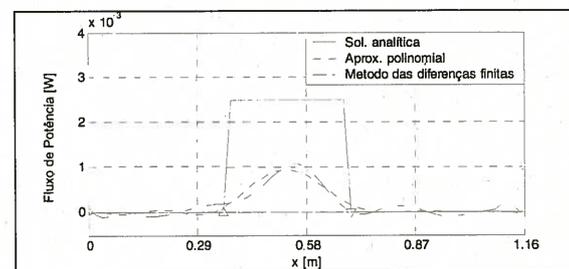
Neste ensaio, a distribuição do fluxo de potência obtida por via experimental, apesar do desvio para a solução teórica, assume, no entanto, uma configuração enquadrada pela fonte e pelo amortecedor.

### 6.2.2 Ensaio II - Análise e discussão de resultados

Para este ensaio, realizado a 25 Hz, os campos de deslocamentos teórico e experimental apresentam uma boa concor-



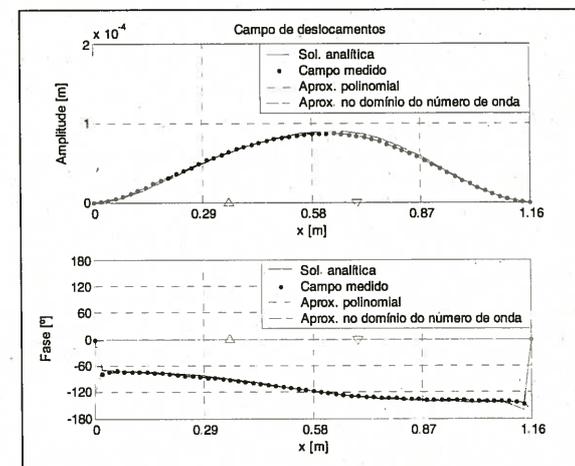
**Fig 20** - Campo de deslocamento da viga bi-encastrada à frequência de 15 Hz.



**Fig 21** - Intensidade activa na viga bi-encastrada a 15 Hz.

dância, figura 22, quer ao nível da amplitude quer ao nível da fase.

A análise comparativa da representação do fluxo de potência na figura 23, revela que, globalmente, ambos os modelos experimentais apresentam um comportamento idêntico, embora distinto do fornecido pelo modelo analítico.



**Fig 22** - Campo de deslocamentos da viga bi-encastrada a 25 Hz.

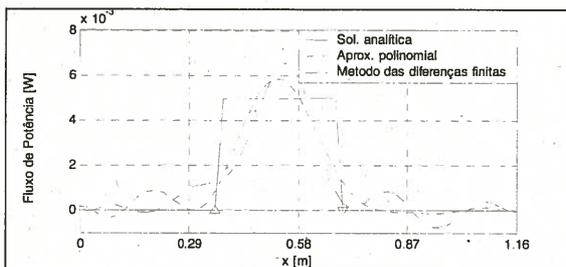


Fig 23 - Intensidade activa na viga bi-encastada a 25Hz.

### 6.2.3 Ensaio III - Análise e discussão de resultados

Na figura 24 representa-se a distribuição do fluxo de potência na viga bi-encastada a 60 Hz para o modelo analítico e para os modelos experimentais. Ao contrário dos testes anteriores, neste caso é fraca a correlação entre o resultado teórico e os resultados experimentais, revelando o método das diferenças finitas modificado um melhor comportamento global do que a aproximação polinomial.

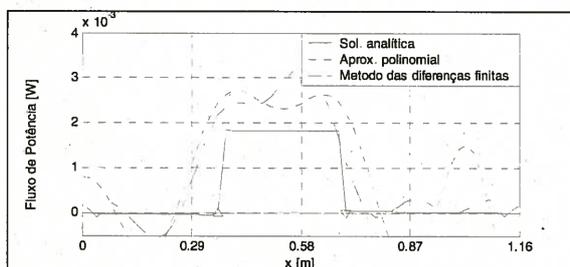


Fig 24 - Intensidade activa da viga bi-encastada a 60 Hz.

Neste ensaio a 60 Hz verifica-se que a distribuição do fluxo de potência vai além da secção activa da viga, em particular na zona de localização do amortecedor. Esta diferença de comportamento, em relação ao ensaio a 15 Hz, poderá ser explicada pela alteração do espectro no domínio do número de onda do campo de deslocamentos, figura 25. Com efeito, verifica-se que no ensaio a 60 Hz o espectro do campo de deslocamentos no domínio do número de onda apresenta uma distribuição mais homogênea do que a 15 Hz, onde são os termos de ordem mais baixa que assumem maior preponderância. Neste caso, os

termos mais significativos são facilmente isolados através da aplicação de um filtro. Este motivo contribui para o maior desvio verificado no ensaio a 60 Hz, quer em termos do valor máximo do fluxo quer em termos da sua distribuição em relação ao modelo analítico.

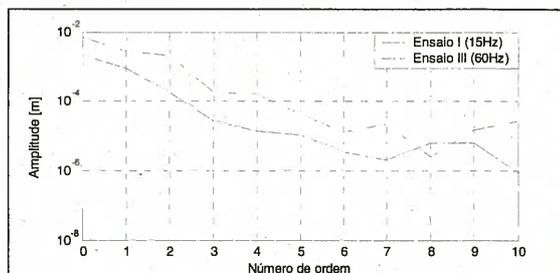


Fig 25 - Representação no domínio do número de onda do campo de velocidades a 15 e a 60 Hz.

## 7 CONCLUSÕES

Este trabalho conduziu a uma formulação consistente para a determinação da intensidade estrutural por via experimental em vigas em regime estacionário harmónico. A formulação é estabelecida em termos dos campos de deslocamento e/ou velocidade e dos respectivos esforços internos dinâmicos, utilizando dois algoritmos distintos para processamento e derivação espacial do campo medido. Um dos algoritmos é baseado no ajustamento polinomial, e o outro no método das diferenças finitas modificado com filtragem no domínio do número de onda.

Os resultados obtidos para a intensidade estrutural e para o seu divergente, nos ensaios realizados com a viga simplesmente apoiada e com a viga bi-encastada, permitiram, nalguns casos, identificar correctamente a distribuição da intensidade estrutural e a localização da fonte e do dissipador de energia vibratória. Estes resultados revelaram, igualmente, que o “ruído” da medição pode influenciar de forma significativa a determinação da intensidade estrutural e do seu divergente.

A aplicação de filtros no domínio do número de onda permite eliminar componentes do “ruído” da medição.

Porém, as componentes da informação, em particular as de ordem mais elevada no domínio do número de onda, e as componentes de alta-frequência do “ruído” da medição são indissociáveis, pelo que a filtragem pode conduzir à eliminação de componentes da informação que são relevantes para o cálculo da intensidade estrutural, nomeadamente através das derivadas de ordem mais elevada.

A diminuição da ordem da derivação espacial, por recurso à medição do campo de deslocamentos e de momentos flectores, conduziu a uma melhoria significativa na distribuição da intensidade estrutural e do divergente, evidenciando-se a propagação do “ruído” associado às medições experimentais com a ordem da derivação espacial.

## REFERÊNCIAS

- [1] D. U. Noiseux, “Measurement of power flow in uniform beams and plates”, *Journal of Acoustical Society of America* – vol 47, pp 238-247, 1970.
- [2] L. Gravić, “Influence Of Local Modifications on Energy Flow In Thin-Walled Structures” Phd Thesis, Université de Technologie de Compiègne, December 1991.
- [3] C. R. Fuller, “The Effects of Wall Discontinuities on The Propagation of Flexural Waves in Cylindrical Shells”, *Journal of Sound and Vibration* - vol 75(2), pp 207-228, 1981.
- [4] G. Pavić, “Cross Spectral Density Methods For Measuring Structure Borne Power Flow On Beams and Pipes” *Journal of Sound and Vibration* – vol 70(1), pp 133-139, 1980.
- [5] G. Pavić, “Measurement of Structure Borne Wave Intensity, Part I: Formulation of The Methods” *Journal of Sound and Vibration* – vol 49(2), pp 221-230, 1976.
- [6] G. Pavić, “Energy flow induced by the structural vibrations of elastic bodies”, Proceedings of the Third International Congress on Intensity Techniques, Senlis-France, August 1990.

