

EVOLUÇÃO DA RIGIDEZ EM PILARES DE BETÃO ARMADO ANÁLISE EXPERIMENTAL E NUMÉRICA

Valente, I.¹; Bastos, A. M. S. T.²; Azeredo, M.³

¹Assistente, Departamento de Eng^a Civil, Universidade do Minho

²Prof. Auxiliar, ³Prof. Catedrático

Departamento de Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



RESUMO

No âmbito do trabalho que se apresenta foram realizados ensaios sobre modelos de pilares de betão armado em escala reduzida, submetidos a carregamentos monotonicamente crescentes até ser atingida a sua rotura, tendo-se medido a correspondente deformação, o que permitiu quantificar a rigidez dos pilares para cada incremento de carga. Apresentam-se alguns métodos e expressões propostos por vários autores, em estudos recentes e também na regulamentação actual, para a quantificação do valor da rigidez em pilares de betão armado e faz-se a comparação dos valores resultantes da utilização das expressões referidas, com os resultados experimentais obtidos nos modelos físicos de pilares.

1. INTRODUÇÃO

A análise de pilares esbeltos de betão armado deve ter em conta os efeitos de 2^a ordem resultantes da sua deformação. A precisão obtida é influenciada pela quantificação mais ou menos precisa da rigidez de flexão efectiva do pilar. Esse valor depende em grande medida da fendilhação, fluência e do comportamento não linear dos materiais.

Para a avaliar a variação da rigidez dos pilares utiliza-se o método experimental, sobre modelos à escala

axial progressivamente crescente, aplicada com uma excentricidade inicial relativamente ao eixo do provete, [Valente,00]. Ao longo de todo do process de carregamento, são medidos os valores das forças aplicadas e dos

reduzida. Os resultados experimentais são analisados com o método das diferenças finitas e posteriormente comparados com expressões regulamentares e expressões retiradas da bibliografia.

2. PROGRAMA EXPERIMENTAL

O programa experimental consiste na realização de ensaios sobre modelos de pilares isolados, articulados nas extremidades e solicitados por uma carga

deslocamentos transversais ao longo do comprimento dos pilares. Resume-se na Tabela 1 a informação relativa a cada um dos provetes ensaiados.

Tabela 1 - Características dos pilares

Pilares	$b(m) = h(m)$	L (m)	e_0 (cm)	A_s (cm ²)	A_{sw} (cm ² /m)
P1	0.055	0.718	1.00	0.3848	1.413
P2	0.055	0.712	1.50	0.3848	1.413
P3	0.052	0.860	1.50	0.4241	1.413
P4	0.052	0.858	1.00	0.4241	1.413

- b dimensão da secção transversal na direcção paralela ao eixo de flexão
- h dimensão da secção transversal na direcção perpendicular ao eixo de flexão
- L comprimento total do pilar
- e_0 excentricidade de aplicação da carga
- A_s armadura longitudinal
- A_{sw} armadura transversal

3. MÉTODOS PARA A DETERMINAÇÃO DA RIGIDEZ

3.1 Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas é uma técnica numérica para obter soluções aproximadas de equações diferenciais. A equação diferencial regente do fenómeno é substituída por um sistema de equações algébricas, de resolução mais simples. No caso geral, uma equação diferencial descreve o comportamento de sistemas contínuos, enquanto equações algébricas descrevem o comportamento de sistemas discretos.

Aplicado à equação diferencial, este método baseia-se no princípio de que a derivada de uma função num dado ponto pode ser aproximada por uma expressão algébrica que engloba os valores da função nesse ponto e em outros da sua vizinhança.

As expressões deste método podem ser utilizadas no cálculo da variação da rigidez dos pilares isolados ao longo do carregamento, já que são conhecidas por medição experimental as deformações transversais em vários pontos ao longo da

altura dos provetes. Estas correspondem a medidas descontínuas num universo contínuo de medições possíveis.

Os pilares a ensaiar são divididos em troços de comprimento semelhante de modo a obter os valores dos deslocamentos horizontais em 7 pontos ao longo da sua altura (Figura 1). Os pontos extremos são considerados como tendo deslocamento nulo. Dispor-se-á dos deslocamentos de um total de 9 pontos, dois dos quais correspondem aos apoios.

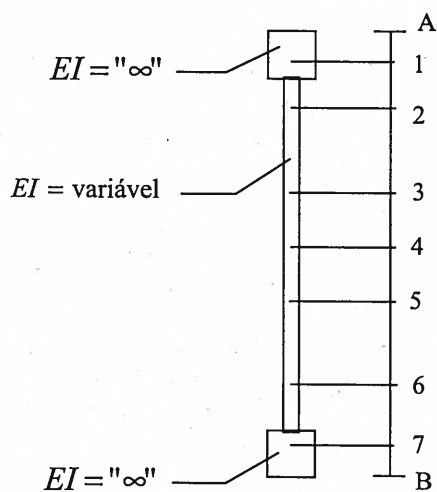


Fig 1 - Pontos de medida ao longo do pilar

Uma vez que o pilar está dividido em troços de comprimentos ligeiramente diferentes, é necessário desenvolver as expressões correspondentes para as derivadas da função, [Chajes,91]. As equações (1) a (3) e a Figura 2 traduzem esta situação.

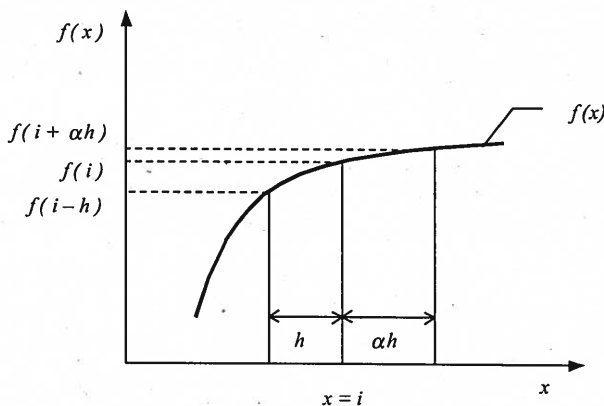


Fig 2 - Relações de derivação

A primeira diferença central para uma função $f(x)$ no ponto $x = i$ é traduzida por (1),

$$\Delta f_i = \frac{f(i + \alpha h) - f(i - h)}{h(\alpha + 1)} \quad (1)$$

em que $f(i + \alpha h)$ e $f(i - h)$ são os valores da função $f(x)$ nos pontos $x = i + \alpha h$ e $x = i - h$, respectivamente.

A segunda diferença central é obtida pela diferença entre as primeiras resultando nas expressões (2) e (3).

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta \left(\frac{f\left(i + \frac{\alpha h}{2}\right) - f\left(i - \frac{h}{2}\right)}{\frac{1}{2}h(\alpha + 1)} \right) \quad (2)$$

$$\Delta^2 f_i = \frac{2[f_{i+\alpha h} - f_i(1 + \alpha) + \alpha f_{i-h}]}{h^2 \alpha (\alpha + 1)} \quad (3)$$

A equação diferencial e condições fronteira impostas são traduzidas pelas equações (4) (w -deformação lateral medida).

$$\begin{cases} EIw'' + Pw = Pe_0 \\ w(A) = w(B) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Para a rigidez EI dos troços extremos, adoptam-se os valores definidos por (5).

$$EI_A = EI_1 = EI_7 = EI_B = \infty \quad (5)$$

A rigidez EI nos pontos intermédios 2 a 6 é à partida desconhecida. O objectivo é avaliar a evolução desta rigidez ao longo do pilar, para sucessivos incrementos de carga.

Sendo f , (3), a função que traduz a deformação w , é possível, por substituição de (3) em (4), obter a expressão (6),

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha(\alpha + 1)} [f_{i+\alpha h} - f_i(1 + \alpha) + \alpha f_{i-h}] + \frac{Ph^2}{EI} f_i &= \\ = \frac{P}{EI} h^2 e_0 & \end{aligned} \quad (6)$$

sendo,

h distância entre o ponto $(i-1)$ e o ponto i
 α razão entre as distâncias entre $(i-1)$ e i , e $(i+1)$ e i .

A expressão (6) é aplicada a cada ponto onde são realizadas as medições. Mediante a quantificação do parâmetro α , que resulta dos espaçamentos definidos, é possível quantificar do valor da rigidez EI para cada incremento de carga axial.

3.2 A rigidez de pilares segundo o ACI

A equação para a determinação da rigidez efectiva de pilares de betão armado sujeitos a carregamentos de curta duração é especificada no Building Code do American Concrete Institute, [ACI,95], por (7),

$$EI = 0.2E_c I_g + E_s I_{se} \quad (7)$$

em que,

E_c módulo de elasticidade do betão;
 E_s módulo de elasticidade do aço;
 I_g momento de inércia da secção de betão;
 I_{se} momento de inércia da secção de aço, em relação ao centro de gravidade da secção de betão.

Segundo alguns autores, [Mirza,90], os resultados da utilização da expressão (7) demonstram que o factor constante de 0.2 conduz a valores de EI pouco rigorosos, já que não são tidos em conta os diferentes parâmetros que influem nesta grandeza. Assim, apresentam a expressão (8), que é uma versão modificada da expressão (7), em que o coeficiente 0.2 é substituído por um factor de redução da rigidez, α .

$$EI = \alpha E_c I_g + E_s I_{se} \quad (8)$$

O valor de α pode ser determinado a partir da expressão (9), que resulta de (8).

$$\alpha = (EI - E_s I_{se}) / E_c I_g \quad (9)$$

Para quantificar a grandeza EI presente na equação (9), recorre-se à relação entre o momento flector resistente do pilar e o momento flector resistente da secção, para pilares bi-articulados [Timoshenko,61], dada por (10),

$$M_{cs} = M_{col} \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P_u}{P_c}}\right) \quad (10)$$

em que,

- M_{cs} momento resistente da secção transversal
- M_{col} momento resistente do pilar de betão armado
- P_u carga axial actuante no pilar
- P_c carga crítica de Euler

A resolução da equação (10) em ordem a P_c conduz à expressão (11),

$$P_c = \frac{\pi^2 P_u}{4 \left[\sec^{-1}(M_{cs} / M_{col}) \right]^2} \quad (11)$$

O valor teórico de EI , (12), é obtido por substituição do valor de P_c , dado por (11), na equação $P_E = \frac{\pi^2}{L^2} EI$.

$$EI_{teórico} = \frac{P_u L^2}{4 \left[\sec^{-1}(M_{cs} / M_{col}) \right]^2} \quad (12)$$

A partir da representação gráfica de $EI_{teórico}/EI_{ACI}$, [Mirza,90], chega-se à conclusão que os valores médios desta relação tendem para a unidade, mas os coeficientes de variação associados a estas equações são muito elevados. Isto significa que, para grande parte dos casos analisados, o valor de EI_{ACI} corresponde a $EI_{teórico}$, embora em outros casos, se encontrem desvios importantes.

3.3 Método proposto por Mirza

Baseado em resultados de cerca de 9500 pilares, com diferentes combinações de variáveis específicas, [Mirza,90] realizou uma análise de regressão linear múltipla sobre valores simulados de EI . A

partir dessa análise propõe a modificação da expressão (8), por substituição do valor de α , de acordo com (13) e (14),

$$EI = \left[\left(0.27 + 0.003 \frac{l}{h} - 0.3 \frac{e}{h} \right) E_c I_g + E_s I_{se} \right] \geq E_s I_{se} \quad (13)$$

$$EI = \left[\left(0.3 - 0.3 \frac{l}{h} \right) E_c I_g + E_s I_{se} \right] \geq E_s I_{se} \quad (14)$$

sendo

- l comprimento do pilar e
- h dimensão da secção transversal segundo o eixo de flexão do pilar.

Segundo este autor, a expressão (13) conduz a valores superiores de EI quando $l/h < 10$, verificando-se o contrário quando $l/h > 10$. Deste modo, a expressão (13) é adequada quando $l/h > 10$ e o mesmo acontece com a expressão (14) quando $l/h < 10$. O limite inferior, $E_s I_{se}$, considerado em ambas as equações, tem como objectivo limitar o dimensionamento quando estão em consideração grandes excentricidades ($e/h > 1.0$).

3.4 Método de Jian-Min Zeng, Lian Duan, Fu-Ming Wang e Wai-Fah Chen

O método apresentado pelos autores, [Duan,89] e [Zeng,92], propõe numa abordagem diferente para estimar a rigidez à flexão de pilares de betão armado para acções de curta duração.

O valor da rigidez, B_d , não depende directamente do momento de inércia ou do módulo de elasticidade, tal como determinados pela mecânica convencional, mas das relações momento-curvatura estabelecidas para secções de betão armado. Na Figura 3 representa-se uma relação momento-curvatura para este tipo de secções.

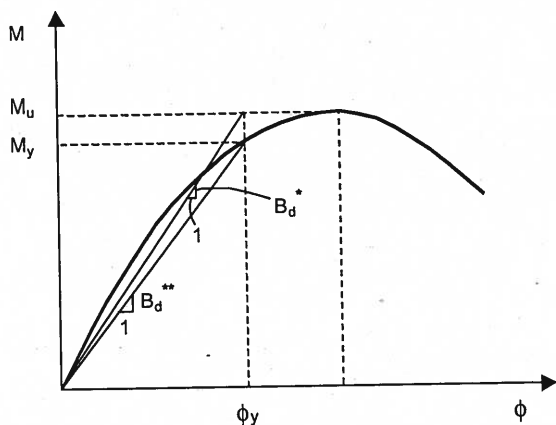


Fig 3 - Relações Momento-Curvatura

A rigidez de um elemento em flexão, quando ocorre a cedência da armadura, é dada segundo a teoria linear elástica, pela expressão (15),

$$B_d^{**} = \frac{M_y}{\phi_y} \quad (15)$$

sendo

B_d^{**} rigidez à flexão para a cedência da armadura de tracção;

M_y momento flector da secção para a cedência da armadura de tracção e

ϕ_y curvatura da secção para a cedência da armadura de tracção.

Como o valor de M_y é difícil de determinar, utiliza-se normalmente em sua substituição o momento último, M_u , (16), em carregamentos de curta duração,

$$B_d^* = \frac{M_u}{\phi_y} \quad (16)$$

De acordo com o ACI Building Code, o valor de M_u é dado por (17), para secções sujeitas a flexão, tal como se representa na Figura 4,

$$M_u = 0.85 f_c' b \xi d^2 \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) + \sigma_s' A_s' (d - d') \quad (17)$$

com

f_c' resistência à compressão do betão simples e

σ_s' tensão na armadura de compressão determinada por compatibilidade e menor do que a tensão de cedência da armadura.

e os valores de ξ e de ϕ_y definidos por (18) e (19).

$$\xi = \frac{\beta_1 x}{d} = \frac{f_y A_s - \sigma_s' A_s'}{0.85 f_c' b d} \leq \xi_b \quad (18)$$

$$\xi_b = \frac{0.003 \beta_1}{0.003 + \epsilon_y}$$

A relação entre a curvatura ϕ_y e a altura relativa da zona comprimida da secção, ξ , é, neste caso, definida por (19).

$$\phi_y d = (0.7 + 2.8 \xi) * 10^{-3} + \frac{f_y}{E_s} \quad (19)$$

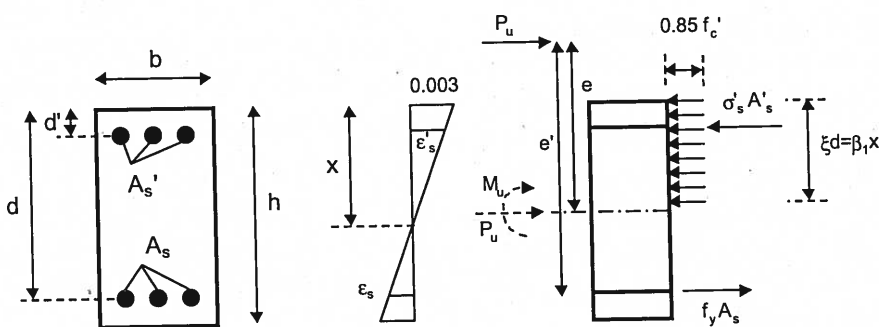


Fig 4 - Equilíbrio de uma secção de betão armado

Atendendo a que o desenvolvimento de fendilhação reduz a rigidez à flexão da secção, e sendo esta redução tanto maior quanto menor for a área de armadura existente na secção, estes autores propõem uma correcção à expressão (16), introduzindo o factor α já referido. Neste caso, o factor α é determinado de acordo com a expressão (20), que faz intervir os diferentes valores do momento flector, M , actuante no elemento em consideração.

$$\alpha = 0.75 + 0.5 \frac{M}{M_u} \quad (20)$$

A rigidez à flexão, B_d , de uma secção rectangular é então dada por (24).

$$B_d = \frac{B_d^*}{\alpha} = \frac{M_u}{\alpha \phi_y} \quad (21)$$

No caso de secções rectangulares sujeitas a flexão composta, a expressão (20) toma a forma (22).

$$P_u e' = M_u + P_u (e' - e) = 0.85 f_c b \xi d^2 \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) + \sigma_s A_s' (d - d') \quad (22)$$

O segundo termo das equações (17) e (22) é idêntico, pelo que substituindo M_u na equação (22), se obtém (23).

$$B_d = (P_u e') / (\alpha \phi_y) \Leftrightarrow B_d = [M_u^* + P_u (e' - e)] / (\alpha \phi_y) \quad (23)$$

Verifica-se em (23) que a rigidez à flexão é significativamente influenciada pela presença de carregamento axial. Uma secção sujeita a uma maior carga axial pode ter maior rigidez que outra sujeita a um esforço axial menor, consideradas constantes as dimensões, materiais e momento flector. Este aspecto reflecte-se no termo $P_u (e' - e)$ da equação (23), em que P_u e M_u^* actuam conjuntamente.

A expressão (24) é proposta para a quantificação da rigidez de pilares de betão armado rectangulares excentricamente

solicitados em carregamentos de curta duração, traduzindo a diminuição da rigidez à flexão com o aumento da excentricidade de aplicação da carga. O factor de redução da rigidez, α , para pilares excentricamente carregados, é definido por (25).

$$EI = (P_u e') / (\alpha \phi_y) \quad (24)$$

$$\alpha = 0.75 + 1.25 \frac{P}{P_u} + 0.2 \frac{e}{h} \quad (25)$$

4. QUANTIFICAÇÃO DA RIGIDEZ EFECTIVA DOS PILARES

4.1 Quantificação da rigidez através do estudo experimental

A evolução da rigidez ao longo do processo de carregamento é um parâmetro essencial na caracterização do comportamento estrutural de pilares. Com as deformações medidas nos ensaios e aplicando o método das diferenças finitas aos valores da deformação, é possível quantificar esta evolução, para os pilares ensaiados. Os diagramas da Figura 5 apresentam os resultados do cálculo.

Verifica-se que nos pilares com a mesma esbelteza, a perda de rigidez é mais precoce quando a excentricidade inicial é superior. Nos pilares menos esbeltos, P1 e P2 (ver Tabela 1), a perda de rigidez, nos primeiros carregamentos, deu-se de forma muito suave, acentuando-se para carregamentos mais elevados. No caso de P1, a perda de rigidez é reduzida até um carregamento de aproximadamente 25 kN, e acentua-se de seguida, até à rotura do pilar. A perda de rigidez de P2 é quase constante até uma carga de cerca de 20 kN, a partir da qual se torna mais acentuada.

No caso dos pilares mais esbeltos, P3 e P4, a diminuição do valor da rigidez manifesta-se desde os primeiros incrementos de carga e é quase proporcional

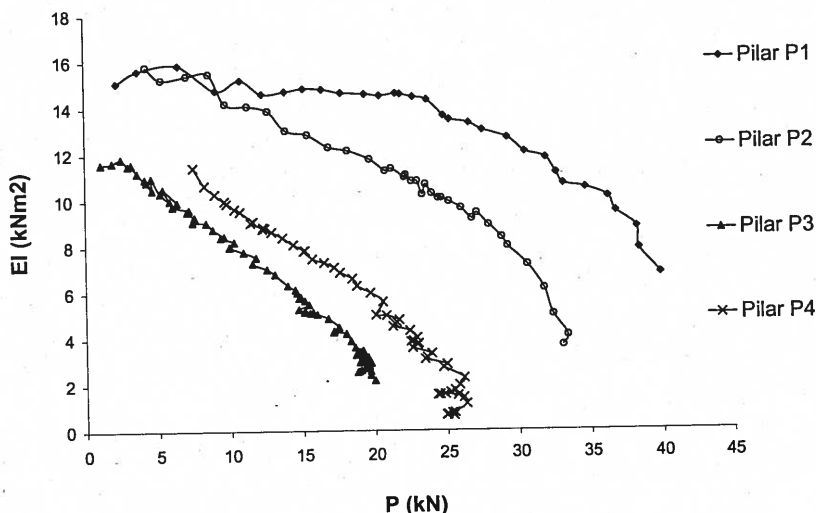


Fig 5 – Variação da rigidez na secção de maior deformação transversal, ao longo do carregamento, nos pilares isolados P1 a P4

ao aumento da sollicitação durante todo o carregamento. A inclinação dos respectivos diagramas $EI-P$ é quase constante, o que permite deduzir que a diferença de valores da excentricidade inicial se traduz numa translação do diagrama $EI-P$.

A observação dos diagramas da Figura 5 não permite identificar um incremento de carga localizado ao qual correspondesse o início da fendilhação dos pilares. Efectivamente, os diagramas de evolução do valor da rigidez EI não apresentam pontos de descontinuidade.

Tal como foi observado experimentalmente, no caso dos pilares menos esbeltos, a fendilhação só foi visível em incrementos de carga já próximos da carga de rotura e no caso dos pilares mais esbeltos, a fendilhação foi-se generalizando por secções próximas daquela onde se viria

Um dos métodos propostos, [Duan,89] e [Zeng,92], permite a quantificação da rigidez ao longo do carregamento, mas torna-se de difícil aplicação porque necessita conhecer a curvatura da secção em cada estágio de carga.

Por este motivo, o valor da rigidez é determinado através deste método apenas para o valor de carga de rotura dos pilares.

a verificar a rotura, sem no entanto ser possível determinar com exactidão qual o incremento de carga em que o processo se iniciou.

4.2 Comparação dos valores de rigidez obtidos pelos diferentes métodos

Faz-se de seguida a comparação do valor da rigidez determinado mediante o uso de expressões propostas pela regulamentação e bibliografia existentes, com os valores resultantes da experimentação.

A maioria dos métodos propõe expressões mais ou menos empíricas de cálculo de um valor médio da rigidez dos pilares, a ser considerado como constante qualquer que seja a carga axial actuante.

O método proposto por [Mirza,90], tem como base uma análise de regressão linear sobre os vários parâmetros que influem na variação da rigidez, permitindo ter em conta a excentricidade de actuação da carga e a esbelteza do elemento, para além das características dos materiais que constituem a peça.

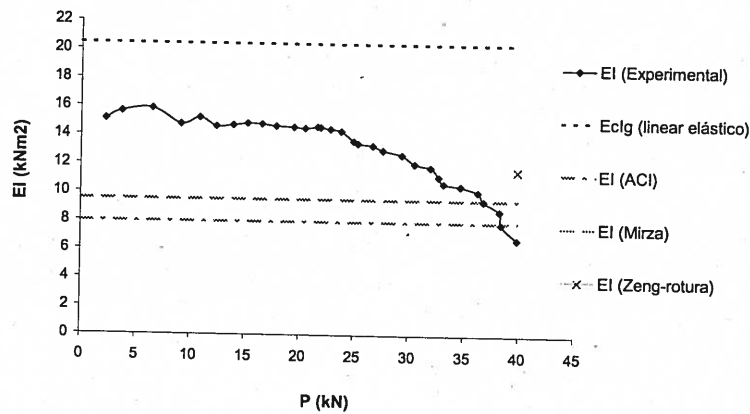
Os valores obtidos pelos diferentes métodos são apresentados na Tabela 2, bem como o valor da rigidez elástica.

Tabela 2 – Valores da rigidez para os pilares P1 a P4

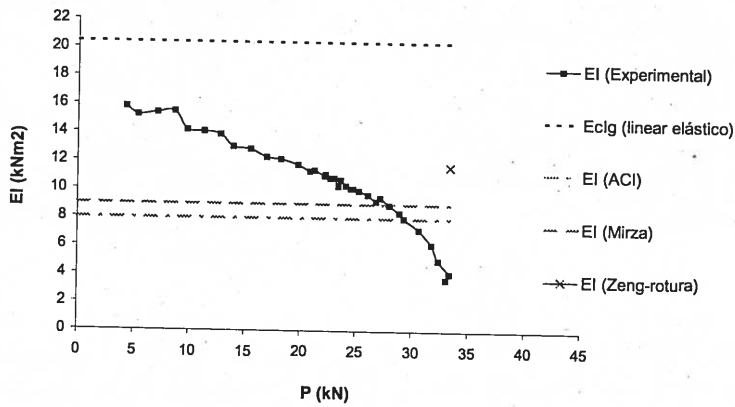
Pilar	$E_c I_g$ (kNm ²)	EI_{ACI} (kNm ²)	EI_{Mirza} (kNm ²)	$EI_{Zeng-rotura}$ (kNm ²)
P1	20.43	7.97	9.51	11.58
P2	20.43	7.97	8.95	11.65
P3	12.46	6.23	6.91	4.92
P4	12.46	6.23	7.27	4.88

A Figura 6 representa, para os quatro pilares ensaiados, a evolução da rigidez obtida experimentalmente e os valores determinados pelos métodos analíticos (ver Tabela 2).

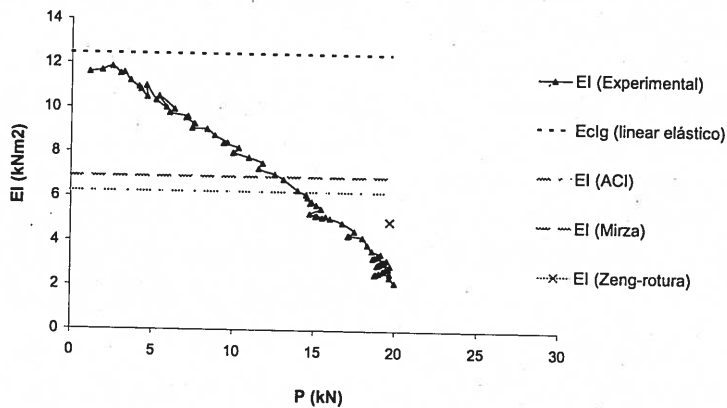
E_c módulo de elasticidade do betão
 I_g inércia da secção de betão em relação ao seu centro de gravidade



a) Pilar P1



a) Pilar P2



b) Pilar P3

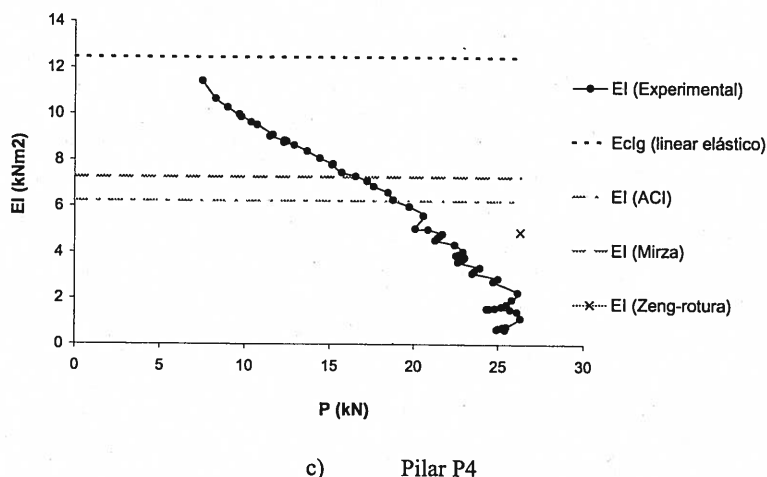


Fig 6 – Valores da rigidez EI nos pilares P1 e P2 para os diferentes métodos

A análise da Figura 6 permite concluir que:

- os valores resultantes das expressões do Código americano ACI correspondem aos menores valores para os pilares menos esbeltos, P1 e P2. Nos pilares mais esbeltos, P3 e P4, o método proposto por Zeng é o que conduziu aos valores mais reduzidos da rigidez;
- os valores obtidos por aplicação das expressões do ACI são, nos casos analisados, sempre inferiores aos resultantes da aplicação das expressões de Mirza. Subjacente aos dois métodos está uma expressão idêntica, em que se aplica um factor de redução ao valor da rigidez da secção de betão. No caso do método ACI, o factor de redução é constante, como já referido. O método proposto por Mirza propõe uma expressão de aplicação directa, em que o factor de redução permite ter em conta a excentricidade de aplicação da carga, o comprimento do pilar e a altura da secção transversal, conduzindo a resultados mais próximos dos observados.

Uma vez que tanto o ACI como Mirza apresentam expressões que quantificam a rigidez como constante qualquer que seja o carregamento, julgou-se conveniente avaliar a carga axial para a

qual os valores de rigidez, propostos por estes métodos, igualam os determinados a partir dos resultados experimentais.

Os resultados dessa avaliação são apresentados na Tabela 3, expressos em percentagem do valor da carga de rotura determinada experimentalmente.

Tabela 3 – Relação entre valores da rigidez propostos para pilares isolados

Pilar	$EI_{Exp} = EI_{ACI}$ ⇒ % $P_{u,Exp}$	$EI_{Exp} = EI_{Mirza}$ ⇒ % $P_{u,Exp}$
P1	96.4	91.1
P2	87.7	78.1
P3	71.1	60.5
P4	71.3	59.7

Não é possível estabelecer uma concordância entre os valores determinados, constatando-se apenas que os valores de rigidez dos pilares menos esbeltos, P1 e P2, aconselhados pelos métodos referidos, igualam o valor da rigidez experimental para valores do carregamento axial elevados ($>0.78P_u$). Nos casos dos pilares mais esbeltos, P3 e P4, os valores da rigidez apresentados igualam a rigidez experimental para uma carga axial que varia entre 60% e 71% das respectivas cargas últimas.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Verificou-se com este trabalho, a importância do método experimental na avaliação do comportamento estrutural de pilares.

Os resultados obtidos permitiram avaliar a adequabilidade e a facilidade de utilização de algumas expressões propostas pela regulamentação e por autores da bibliografia na quantificação da rigidez de pilares de betão armado. Verificou-se que os métodos propostos pelo ACI-Building Code e por Mirza são os mais simples de utilizar. Este último conduz a resultados mais adequados do ponto de vista dos níveis de carga axial que usualmente são utilizados em projecto e recomendados pela regulamentação.

BIBLIOGRAFIA

- Chajes, "Principles of Structural Stability Theory", Civil Engineering and Engineering Mechanics Series, Prentice Hall, 1991.
- ACI 318-95, "Building code requirements for structural concrete", American Concrete Institute, Detroit
- Mirza, S. A., "Flexural Stiffness of Rectangular Reinforced Concrete Columns", ACI Structural Journal, Jul-Aug 1990, pp. 425-435
- Timoshenko, S. P., and Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability", 2nd Edition, McGraw-Hill Book Co., New York, 1961.
- Lian Duan, Fu-Ming Wang and Wai-Fah Chen, "Flexural Rigidity of Reinforced Concrete Members", ACI Structural Journal, Jul- Aug 1989, pp. 419-427
- Jian-Ming Zeng, Lian Duan, Fu-Ming Wang and Wai-Fah Chen, "Flexural Rigidity of Reinforced Concrete Columns", ACI Structural Journal, Mar-Apr 1992, pp. 150-158
- Valente, M^a Isabel B., "Estudo experimental da encuvadura em micropilares de betão armado", Tese de Mestrado, FEUP, 2000