

# Estudo paramétrico da rigidez de impacto em colisões induzidas por sismos entre dois sistemas de 1GDL com comportamento não linear.

## Parametric study on the impact stiffness of earthquake-induced pounding between two SDOF systems with nonlinear behavior.

P. L. Folhento<sup>1</sup> | R. C. Barros<sup>2</sup> | M. T. Braz-César<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Aluno de Doutoramento, FEUP – Universidade do Porto

<sup>2</sup>Professor Associado com Agregação, FEUP – Universidade do Porto

<sup>3</sup>Professor Adjunto, ESTiG – Instituto Politécnico de Bragança

### resumo

Fenómenos naturais como sismos poderão induzir deslocamentos laterais excepcionais capazes de provocar colisões entre edifícios adjacentes com distâncias de separação insuficientes, influenciando significativamente o comportamento dinâmico das estruturas e provocando dano estrutural considerável ou levar ao colapso das estruturas intervenientes. O comportamento não-linear dos edifícios é importante na análise estrutural e dinâmica, revelando-se mais significativo na ocorrência de impacto entre edifícios. Em problemas de impacto entre edifícios é habitual o uso de elementos de impacto, cuja eficácia depende principalmente na definição dos valores dos seus parâmetros, a rigidez e o amortecimento de impacto. A rigidez de impacto está sujeita a incertezas, podendo ser reduzidas através de estudos paramétricos. Assim, no presente artigo considera-se o estudo de impactos entre dois sistemas estruturais não-lineares adjacentes com um grau de liberdade, variando a rigidez de impacto do elemento de contacto e verificando a sua influência nas respostas das estruturas. Este parâmetro influencia mais as estruturas flexíveis, particularmente ao nível dos deslocamentos, acelerações e forças de impacto e tem pouca influência nas forças inelásticas laterais máximas.

Palavras-chave:

### abstract

Natural phenomena such as earthquakes may induce exceptional lateral displacements capable of causing collisions between adjacent buildings with insufficient separation distances, significantly influencing the dynamic behavior of the structures and causing considerable structural damage or leading to the collapse of the structures involved. The non-linear behavior of buildings is important in structural and dynamic analysis, revealing to be more significant in the occurrence of impacts between buildings. In impact problems between buildings, it is usual to use impact elements, whose effectiveness depends mostly on the definition of their parameters' values, the impact stiffness and damping. Impact stiffness is subjected to uncertainties that can be reduced through parametric studies. Thus, this paper considers the study of impacts between two adjacent nonlinear structural systems with a single degree-of-freedom, varying the impact stiffness of the contact element and verifying its influence on the responses of the structures. This parameter influences the flexible structures more, particularly in terms of displacements, accelerations and impact forces and has little influence on the maximum lateral inelastic forces.

Keywords:

# 1- INTRODUÇÃO

É bastante comum em áreas metropolitanas com elevada densidade populacional a construção de edifícios com distâncias de separação muito pequenas ou até inexistentes. Esta distância de separação é insuficiente na medida em que na ocorrência de fenómenos naturais, tais como sismos, poderão induzir vibrações e deslocamentos laterais excepcionais capazes de provocar impactos ou colisões entre os edifícios. A influência significativa dos impactos sísmicos no comportamento dinâmico das estruturas e o dano estrutural resultante, poderá criar esforços imprevisíveis nos elementos estruturais, ou no pior cenário levar ao colapso global das estruturas intervenientes.

O estudo de impactos entre edifícios induzidos por excitações sísmicas é relativamente recente. Não obstante, diversos autores dedicaram-se à investigação deste fenómeno, destacando-se: o uso de modelos discretos, planos (2D) ou tridimensionais (3D), dos edifícios intervenientes ou usando o método de elementos finitos (MEF); consideração de sistemas estruturais de edifícios com 1GDL ou múltiplos GDL (MGDL), ou ainda com múltiplos andares no caso de modelos 3D; o uso de diferentes elementos de contacto; a consideração do comportamento não linear das estruturas; a mitigação destas colisões através do estudo de distâncias mínimas ou críticas de separação entre os edifícios, através de técnicas de ligação dos edifícios, interposição de elementos flexíveis entre os edifícios, ou através da aplicação de dispositivos de controlo de vibrações; o estudo da influência de elementos não estruturais em edifícios; etc.

Na literatura existem duas abordagens à modelação de impactos entre estruturas de edifícios ou pontes (Jankowski e Mahmoud, 2015), a modelação clássica ou abordagem baseada no impulso, que se baseia nas leis de conservação de energia e de momento linear, e nas velocidades imediatamente antes e depois do impacto dando origem ao conceito de coeficiente de restituição (CR); e a utilização de elementos de contacto ou impacto, que contrariamente à abordagem anterior, que assume o impacto como instantâneo e, portanto, de duração desprezável, são capazes de determinar as forças de impacto durante a colisão, i.e., estes elementos, funcionando apenas à compressão e de dimensões negligenciáveis, ficam ativos exclusivamente quando os edifícios se interpenetram, i.e., quando se deteta um impacto.

A desvantagem no uso destes modelos de impacto, compostos genericamente por uma mola e um amortecedor, fruto de pressupostos e simplificações ligados a teorias da mecânica de contacto (Johnson, 1987) prende-se com o facto de estes dependerem dos valores atribuídos às características elásticas (rigidez de impacto) e dissipadoras de energia de vibração (amortecimento de impacto), respetivamente, da mola e do amortecedor.

Associado à rigidez de impacto estão incertezas, nomeadamente relacionadas com a geometria e o material do local de contacto, e que poderão ser ultrapassadas ou pelo menos atenuadas com o recurso a estudos paramétricos.

O comportamento não-linear inelástico é inerente em estruturas de Engenharia Civil, quando sujeitas a ações dinâmicas como excitações sísmicas moderadas a severas. Assim, a consideração deste tipo de comportamento torna-se importante na análise estrutural e dinâmica, revelando-se ainda mais significativo na ocorrência de impactos entre edifícios.

Assim, este estudo apresenta uma análise paramétrica da rigidez de impacto no estudo de colisões entre edifícios adjacentes, modelados como sistemas não-lineares com um grau de liberdade (1GDL), sujeitos a uma excitação sísmica.

## 2- MODELO NUMÉRICO

O presente modelo considera duas estruturas com 1GDL representadas na Fig. 1 e definidas pelas suas propriedades/características dinâmicas adotadas no Quadro 1 com base nos estudos de Jankowski e Mahmoud (Jankowski e Mahmoud, 2015), por forma a replicar uma estrutura de um edifício flexível e outra rígida. Considerou-se apenas o cenário das estruturas estarem afastadas 3cm.

A equação que governa o movimento dinâmico de um sistema linear considerando a força de impacto resultante da colisão com o edifício adjacente é

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -\frac{f}{p}(t) - m\ddot{x}_g(t) \quad (1)$$

onde  $m$ ,  $c$ , e  $k$ , são a massa, coeficiente de amortecimento e rigidez do sistema, respetivamente;  $\ddot{x}$ ,  $\dot{x}$ , e  $x$  são o deslocamento, velocidade e aceleração da estrutura, respetivamente; e  $\ddot{x}_g$  é a aceleração da excitação sísmica e  $f_p$  a força de impacto. O sinal sísmico considerado encontra-se representado na Figura 2.

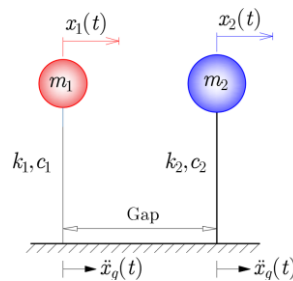


Fig. 1 | Sistemas de massa agrupada adjacentes com 1GDL.

Quadro 1 | Propriedades estruturais e dinâmicas dos sistemas considerados.

Propriedades estruturais e dinâmicas	Sistema flexível (Edifício 1)	Sistema rígido (Edifício 2)
Massa (kg)	$m_1=75000$	$m_2=3000 \times 10^3$
Rigidez (kN/m)	$k_1=2056$	$k_2=1.316 \times 10^6$
Período natural (s)	$T_1=1.2$	$T_2=0.3$
Coeficiente de amortecimento (kg/s)	$c_1=39270$	$c_2=6.283 \times 10^6$
Rácio de amortecimento (%)	$\xi_1=5$	$\xi_2=5$

### 2.1. Comportamento não-linear

Como se irá considerar o comportamento não-linear dos sistemas estruturais (Figura 3) a equação anterior é modificada da seguinte forma

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + f_r[\dot{x}(t), x(t)] = -f_p(t) - m\ddot{x}_g(t) \quad (2)$$

em que

$$f_r[\dot{x}(t), x(t)] = akx(t) + f_r^*(t) \quad (3)$$

é a força de restituição dada pela soma da componente elástica ( $ak_0x$ ) e histerética ( $f_r^*$ ). O parâmetro  $a$  é o quociente entre a rigidez pós- e pré-cedência.

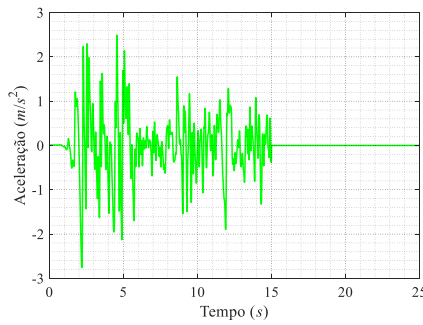


Fig. 2 | Acelerações da componente NS do sismo El Centro – CA - Sta9, Imperial Valley-02 (PEER).

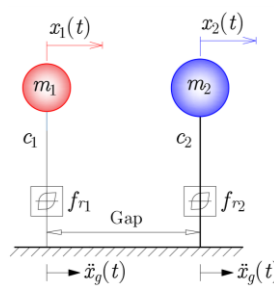


Fig. 3 | Sistemas não-lineares de massa agrupada adjacentes com 1GDL.

O comportamento não-linear é então definido pelo uso de um modelo histerético com transições suaves – “*smooth hysteresis model*”, desenvolvido por Sivaselvan e Reinhorn (Sivaselvan e Reinhorn, 1999, 2000), uma modificação do modelo Bouc-Wen, sendo capaz de modelar diferentes comportamentos histeréticos, viz., degradação de rigidez, deterioração da resistência e o efeito de “*pinching*”.

A rigidez total que caracteriza o modelo histerético referido é dada por

$$k_{total} = k_{pós-cedência} + \frac{k_{hyst} k_{slip-lock}}{k_{hyst} + k_{slip-lock}} \quad (4)$$

onde se pode distinguir 3 molas diferentes com rigidezes associadas, a rigidez linear pós-cedência,  $k_{pós-cedência}$ , a rigidez histerética,  $k_{hyst}$ , e a rigidez slip-lock,  $k_{slip-lock}$ , para simular os efeitos do *pinching*, perfazendo uma rigidez total,  $k_{total}$ .

No quadro 2 apresentam-se os valores associados aos parâmetros definidores do comportamento histerético com base no trabalho de Sivaselvan e Reinhorn (Sivaselvan e Reinhorn, 2000), representando um comportamento típico de estruturas metálicas, i.e., com moderada a severa degradação de rigidez e resistência e efeito de *pinching* ligeiro.

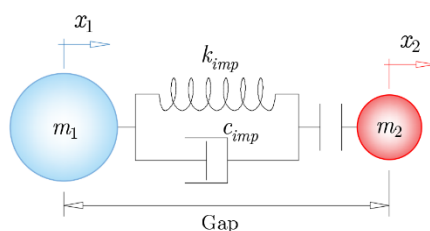
## 2.2. Modelo de impacto

O modelo de impacto considerado no presente estudo é o modelo linear viscoelástico, ou também designado por modelo de Kelvin-Voigt (J. Wolf e P. Skrikerud, 1980, Anagnostopoulos, 1988, 2004), o qual se encontra representado na Figura 4.

Este modelo unidimensional é dos mais utilizados na literatura para o estudo de impactos estruturais entre edifícios. Apesar da vantagem que possui em contabilizar os efeitos da dissipação

**Quadro 2 |** Parâmetros adotados para a definição do comportamento histerético (Força de cedência e respetivo deslocamento do edifício 1:  $F_{y1}=70kN$ ,  $x_{y1}=3.4cm$ . Força de cedência e respetivo deslocamento do edifício 2:  $F_{y2}=7000kN$ ,  $x_{y2}=0,53cm$ ; Fator de ductilidade:  $\mu=8$ ).

Parâmetros histeréticos	Valor
Rácio entre a rigidez pós e pré cedência ( $a$ )	0.05
Parâmetro controlador da suavidade da transição entre pré e pós cedência ( $n_{BW}$ )	5
Parâmetros controladores da forma da descarga ( $\eta_1, \eta_2$ )	0.50
Parâmetro que controla a degradação de rigidez ( $\alpha$ )	5
Parâmetro controlador da degradação de resistência baseado nas demandas de ductilidade ( $\beta_1$ )	0.40
Parâmetro controlador da degradação de resistência baseado nas demandas de energia ( $\beta_2$ )	0.20
Comprimento de escorregamento ( $R_s$ )	0.01
Parâmetro que controla a parte da força lateral de cedência onde o escorregamento ocorre ( $\sigma_s$ )	0.40
Parte que controla a força lateral de cedência média para cada lado a partir de onde o escorregamento ocorre ( $\lambda_s$ )	0



**Fig. 4 |** Modelo de impacto/contacto Kelvin-Voigt.

de energia de vibração, verifica-se imediatamente antes da separação dos corpos, o desenvolvimento de uma força de tração que tende a juntar os corpos, não possuindo significado físico. Deve-se este facto à associação em paralelo da mola e do amortecedor, o que significa que as tensões totais são obtidas pela soma das tensões na mola e no amortecedor, i.e., os elementos irão sofrer a mesma deformação resultando num mesmo coeficiente de amortecimento e uma dissipação de energia uniforme nos dois períodos de impacto (período de aproximação e restituição), o que na realidade não acontece (Jankowski e Mahmoud, 2015). Contudo, num estudo de Jankowski (Jankowski, 2005) verifica-se que este modelo, juntamente com o modelo não-linear viscoelástico, apresentam os menores erros de simulação com base nos resultados experimentais utilizados.

Assim, a força de impacto pode ser calculada usando o seguinte sistema de equações

$$f_p(t) = \begin{cases} k_{imp} \delta(t) + c_{imp} \dot{\delta}(t), & \text{para } \delta(t) > 0 \\ 0 & \text{para } \delta(t) \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

onde  $k_{imp}$  é a rigidez de impacto,  $\delta$  é a distância de interpenetração entre os edifícios que dita a condição de impacto, e  $c_{imp}$  é o coeficiente de amortecimento dado por (Anagnostopoulos, 2004)

$$c_{imp} = 2\xi_{imp} \sqrt{k_{imp} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad \text{onde} \quad \xi_{imp} = \frac{-\ln(CR)}{\sqrt{\pi^2 + [\ln(CR)]^2}} \quad (6)$$

em que  $\xi_{imp}$  é o rácio de amortecimento de impacto.

Para contrariar a desvantagem deste modelo de impacto, procede-se de forma semelhante a Komodromos et al. (Komodromos et al., 2007), modificando a equação 5 da seguinte forma

$$f_p(t) = \begin{cases} k_{imp} \delta(t) + c_{imp} \dot{\delta}(t) & \text{para } f_p(t) > 0 \\ 0 & \text{para } f_p(t) \leq 0 \end{cases} \quad (7)$$

O valor do coeficiente de restituição necessário para a definição do rácio de amortecimento de impacto e coeficiente de amortecimento de impacto depende do material dos edifícios em colisão. Uma vez que se considerou um comportamento histerético típico de uma estrutura metálica, assume-se um impacto entre estruturas de aço e, portanto, o CR pode ser obtido pela expressão proposta por Jankowski (Jankowski, 2010) baseada em resultados experimentais,

$$CR = -0.0039\dot{x}_{imp}^3 + 0.0440\dot{x}_{imp}^2 - 0.18670\dot{x}_{imp} + 0.7299 \quad (8)$$

e que depende do valor da velocidade imediatamente antes do impacto.

A rigidez de impacto, geralmente, é da mesma ordem de grandeza da rigidez axial do piso mais rígido e, como já referido, está sujeita a variadas incertezas nomeadamente relacionadas com o material e a geometria do local de impacto, velocidades de impacto variáveis, etc. (Anagnostopoulos, 1988).

De acordo com o estudo paramétrico de Anagnostopoulos (Anagnostopoulos, 1988) relativamente à rigidez de impacto, verificou-se que as respostas em termos de deslocamento são de alguma forma insensíveis à rigidez de impacto, contudo o mesmo não aconteceu com as respostas em termos de velocidades e acelerações.

Goldsmith (Goldsmith, 1960) referiu que impactos entre sistemas de aço possuem geralmente valores para a rigidez de impacto maiores que entre sistemas de betão.

Os resultados experimentais de van Mier et al. (van Mier et al., 1991) revelam que impactos entre sistemas de betão dependem principalmente da geometria de contacto e geralmente variam entre  $1,2 \times 10^9 \text{ N/m}^{3/2}$  e  $2,6 \times 10^9 \text{ N/m}^{3/2}$  (considerando a lei de Hertz, i.e., uma mola não linear).

Cole et al. (Cole et al., 2010) referiu que a rigidez de impacto é tipicamente dez vezes a rigidez axial do piso mais rígido.

Vasconcelos (Vasconcelos, 2011) realizou um estudo paramétrico variando o valor da rigidez de impacto, verificando que este parâmetro tem pouca influência nas forças de impacto entre pisos e entre pisos e pilares.

Jankowski (Jankowski, 2005) considerou para a rigidez de impacto no modelo de impacto linear viscoelástico o valor de  $1,40 \times 10^9 \text{ N/m}$  baseado em resultados experimentais de duas torres metálicas de escala reduzida, e o valor de  $2,07 \times 10^7 \text{ N/m}$  baseado em resultados experimentais de uma esfera de aço em queda livre contra uma superfície de aço rígida.

No presente estudo, a rigidez de impacto será variada entre o valor de  $1,00 \times 10^6 \text{ N/m}$  e  $1,00 \times 10^{11} \text{ N/m}$ , realizando mais de mil simulações numéricas, por forma a verificar a influência deste parâmetro nas respostas de deslocamento, velocidade, acelerações, forças de impacto, distância de interpenetração e forças laterais não lineares dos sistemas de 1GDL considerados.

### 2.3. Método de solução numérica

A formulação anterior foi desenvolvida com recurso ao *software* Matlab (MATLAB, 2014). Tendo em conta o sinal apresentado na Figura 2 os sistemas não lineares estão sujeitos a 15 segundos do sinal sísmico, e para a resolução das equações diferenciais do movimento dinâmico recorreu-se à formulação de espaço-estado e ao método Runge Kutta de quarta ordem considerando um passo fixo de  $5 \times 10^{-4}$ s.

## 2- DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Apresenta-se na Figura 5 o gráfico dos deslocamentos máximos absolutos das duas estruturas consideradas em função dos vários valores da rigidez de impacto. As Figuras 6 e 7 mostram, respectivamente, as respostas máximas absolutas da velocidade e aceleração em função da rigidez de impacto.

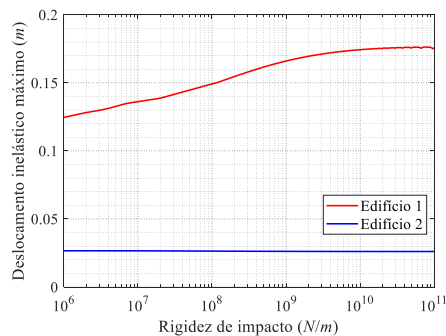


Fig. 5 | Deslocamentos máximos absolutos em função da rigidez de impacto.

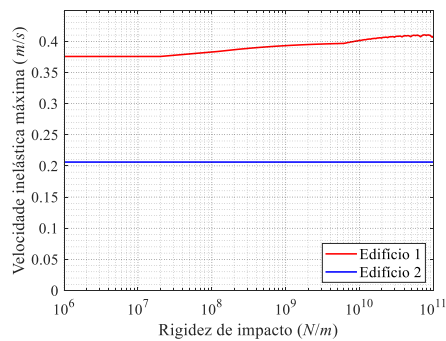


Fig. 6 | Velocidades máximas absolutas em função da rigidez de impacto.

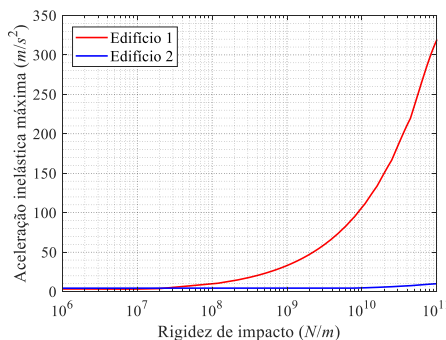


Fig. 7 | Acelerações máximas absolutas em função da rigidez de impacto.

A Figura 8 apresenta as forças laterais inelásticas máximas absolutas para cada valor da rigidez de impacto. Finalmente as forças de impacto e a distância de interpenetração máximas absolutas para cada valor da rigidez de impacto encontram-se representadas, respetivamente, nas Figuras 9 e 10.

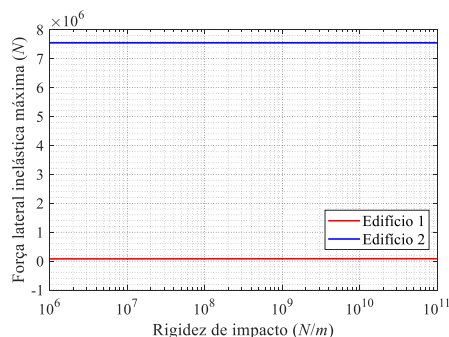


Fig. 8 | Forças inelásticas laterais máximas absolutas em função da rigidez de impacto.

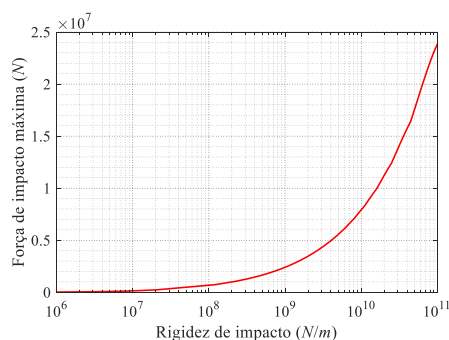


Fig. 9 | Forças de impacto máximas absolutas em função da rigidez de impacto.

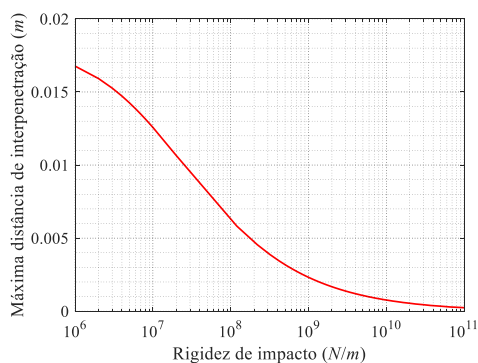


Fig. 10 | Distâncias de interpenetração máximas absolutas em função da rigidez de impacto.

No geral, é possível verificar que a rigidez de impacto tem uma maior influência na resposta da estrutura mais flexível. As estruturas rígidas são mais influenciadas em termos de acelerações, onde se verifica um pequeno aumento com o aumento da rigidez de impacto (Figura 7).

Observa-se uma tendência de aumento dos deslocamentos, velocidades, acelerações e forças de impacto com o aumento da rigidez de impacto. Este aumento é particularmente evidente nas acelerações e forças de impacto.

Da observação da Figura 10 é possível verificar que no caso de a rigidez de impacto ser subestimada poderá levar a grandes distâncias de interpenetração e a uma sobreposição irreal das



estruturas. Por outro lado, uma sobrestimação do valor da rigidez de impacto resultará em distâncias de interpenetração menores, mas forças de impacto e acelerações máximas grandes.

No caso das forças inelásticas máximas na Figura 8 é possível concluir que a variação do valor da rigidez de impacto tem pouca ou nenhuma influência.

O presente estudo apenas considerou a colisão entre estruturas de 1GDL com comportamento não linear é, portanto, necessário proceder a mais estudos paramétricos considerando a rigidez de impacto, realizando comparações com os sistemas em regime elástico, o uso de sistemas estruturais com mais graus de liberdade, o uso de sistemas tridimensionais considerando as forças tangenciais e de fricção, o uso e comparação de diferentes modelos de contacto, etc., por forma a reduzir as incertezas relacionadas com este parâmetro.

## **4- CONCLUSÕES**

Neste estudo paramétrico, que considera a análise das colisões entre duas estruturas de 1GDL com comportamento não-linear, permite concluir que a rigidez de impacto tem uma maior influência em estruturas flexíveis. O aumento da rigidez de impacto leva a aumentos dos deslocamentos e velocidades e, aumentos mais evidentes nas respostas de aceleração e forças de impacto. Por outro lado, a variação da rigidez de impacto não influencia significativamente as forças inelásticas. Adicionalmente, a subestimação da rigidez de impacto poderá levar a uma sobreposição irreal das estruturas (traduzida pela sua distância de interpenetração) e a sua sobrestimação a valores irrealistas das forças de impacto e acelerações máximas.

## **AGRADECIMENTOS**

Este artigo foi desenvolvido no âmbito do doutoramento, em curso, do primeiro autor, e financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (FCT) através da bolsa de doutoramento SFRH/BD/139570/2018 no âmbito do programa POCH (N2020 - P2020), e financiado pelo Fundo Social Europeu (FSE) e fundos nacionais do MCTES. Este trabalho também está integrado nas atividades de I&D do Instituto de I&D em Estruturas e Construções (*CONSTRUCT*), apoiado financeiramente pelo Fundo Base UIDB/04708/2020 através de fundos nacionais da FCT/MCTES (PIDDAC).

## REFERÊNCIAS

- R. Jankowski, e S. Mahmoud, *Earthquake-Induced Structural Pounding*, Switzerland: Springer, 2015.
- K. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge university press, 1987.
- Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER) strong ground motion data base, [Online]. Available: <https://peer.berkeley.edu/peer-strong-ground-motion-databases>.
- M. V. Sivaselvan, e A. M. Reinhorn, "Hysteretic Models for Cyclic Behavior of Deteriorating Inelastic Structures," Technical Report MCEER-99-0018, Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo, Buffalo, New York, 1999.
- M. V. Sivaselvan, e A. M. Reinhorn, "Hysteretic models for deteriorating inelastic structures," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 126, no. 6, pp. 633-640, 2000.
- J. Wolf e P. Skrikerud, "Mutual pounding of adjacent structures during earthquakes," *Nuclear Engineering and Design*, vol. 57, pp. 253-275, 1980.
- S. Anagnostopoulos, "Pounding of buildings in series during earthquakes," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 16, pp. 443-456, 1988.
- S. Anagnostopoulos, "Equivalent viscous damping for modeling inelastic impacts in earthquake pounding problems," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 33, pp. 897-902, 2004.
- R. Jankowski, "Non-linear viscoelastic modelling of earthquake-induced structural pounding," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 34, pp. 595-611, 2005.
- P. Komodromos, P. Polycarpou, L. Papaloizo, e M. Phocas, "Response of seismically isolated buildings considering poundings," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 36, pp. 1605-1622, 2007.
- R. Jankowski, "Experimental study on earthquake-induced pounding between structural elements made of different building materials," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 39, pp. 349-354, 2010.
- Goldsmith, W. *Impact: The Theory e Physical Behaviour of Colliding Solids*. Edward Arnold (Publishers) LTD: London. 1960.
- J. van Mier, A. F. Pruijssers, H. Reinhardt, e T. Monnier, "Load-Time Response of Colliding Concrete Bodies," *Journal of Structural Engineering*, Vols. 117, No. 2, no. 25544, pp. 354-374, 1991.
- G. L. Cole, R. P. Dhakal, A. J. Carr, e D. K. Bull, "Building pounding state of the art: Identifying structures vulnerable to pounding damage," in *New Zealand Society of Earthquake Engineerings (NZSEE) Conference*, 26-28 March, Wellington, NZ, 2010.
- H. Vasconcelos, "Estudo da Colisão entre Edifícios de Betão Armado e Comparação das suas Envolventes de Resistência via Análise "Pushover"," M.Sc. Dissertation, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2011.
- MATLAB 2014a., Natick, Massachusetts, USA: MathWorks, Inc., 2014.