

# Caracterização da importância das propriedades mecânicas usando índices de Sobol em estruturas compósitas

## Characterization of the importance of mechanical properties using Sobol indices in composite structures

Luísa Natália Hoffbauer<sup>1</sup> | Carlos Conceição António<sup>2</sup>

<sup>1</sup> INEGI/LAETA, Instituto Superior de Engenharia, P. Porto, Porto, Portugal *Email:* lnh@isep.ipp.pt

<sup>2</sup> INEGI/LAETA, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, Portugal *Email:* cantonio@fe.up.pt

### resumo

Para estudar o problema das incertezas em estruturas compósitas é proposta uma abordagem baseada no projeto ótimo para um nível de fiabilidade específico ao qual corresponde uma carga máxima aplicada à estrutura compósita. Este cenário corresponde a um problema inverso de fiabilidade para os valores médios das propriedades mecânicas. Para hierarquizar estas propriedades, geram-se pontos dispersos num domínio centrado nos seus valores médios, pelo método do delineamento uniforme (UDM). São obtidos o número de Tsai para a falha mais provável, o índice de fiabilidade e as sensibilidades relativas para cada ponto considerado no UDM. Assumindo estes pontos como padrões de entrada/saída, desenvolve-se uma rede Neuronal Artificial posteriormente usada para estudar a propagação de incertezas com base nos índices de Sobol.

**Palavras-chave:** estruturas compósitas, incertezas, delineamento uniforme, fiabilidade, rede Neuronal Artificial, índices de Sobol

### abstract

In order to study the problem of uncertainties in composite structures, an approach based on the optimal design for a specific level of reliability is proposed, corresponding to a maximum load applied to the structure. This scenario corresponds to an inverse reliability problem for the mean values of mechanical properties. To rank these properties, scattered points are generated in a domain centered on their mean values, using the uniform design method (UDM). The Tsai number for the most probable failure, the reliability index and the relative sensitivities for each point considered in the UDM are obtained. Assuming these points as input / output patterns, an Artificial Neuronal Network is developed to study the propagation of uncertainties based on Sobol indices.

**Keywords:** composite structures, uncertainties, uniform design, reliability, artificial neuronal network, Sobol indexes

# 1- INTRODUÇÃO

O uso de materiais compósitos laminados em todos os tipos de estruturas tem aumentado nos últimos anos. As variações nos parâmetros de fabrico, no controlo de qualidade e a heterogeneidade dos materiais, são alguns dos fatores que introduzem incerteza nos materiais compósitos, afetando o desempenho das aplicações estruturais destes materiais. Daí a necessidade de uma análise da propagação de incertezas que permita analisar a influência da propagação das incertezas na resposta estrutural e determinar como a incerteza na resposta estrutural pode ser atribuída às diversas variáveis de entrada, o que permite identificar as mais importantes.

Assim, é proposta uma abordagem baseada no projeto ótimo de estruturas com o objetivo de atingir um nível de fiabilidade específico e a correspondente carga máxima aplicada à estrutura compósita é obtida em função do ângulo das camadas. Este cenário corresponde a um problema de fiabilidade inverso e é resolvido para os valores médios de referência das propriedades mecânicas dos compósitos laminados. Seguidamente, com o objetivo de hierarquizar as variáveis de entrada, gera-se um conjunto de pontos uniformemente dispersos num domínio centrado nos valores médios de referência das variáveis aleatórias de entrada, utilizando-se para o efeito o método do delineamento uniforme (*Uniform Design Method*, UDM). São então obtidos o número de Tsai associado ao ponto de falha mais provável (*Most Probable Failure Point*, MPP), o índice de fiabilidade e as respetivas sensibilidades relativas para cada ponto obtido considerado no UDM. Em segundo lugar, usando os pontos gerados pelo UDM como padrões de entrada/saída, foi desenvolvida uma Rede Neuronal Artificial (RNA) com aprendizagem baseada em pesquisa evolucionária supervisionada. Em terceiro lugar, usando a RNA desenvolvida, é estudada a propagação de incertezas em função do ângulo das camadas utilizando os índices de Sobol.

## 2- PROPAGAÇÃO DE INCERTEZAS

O problema da propagação de incertezas de estruturas compósitas laminadas é estudado de acordo com os seguintes passos:

1. É considerada uma abordagem baseada no projeto ótimo de estruturas compósitas com o objetivo de atingir um índice de fiabilidade específico  $\beta_a$  sendo calculada a carga máxima correspondente em função do ângulo das camadas  $a$ . Este problema de fiabilidade inverso é resolvido para os valores médios,  $\mu_i$ , das propriedades mecânicas dos compósitos laminados.
2. Usando o método do delineamento uniforme (UDM), é gerado um conjunto de pontos pertencente ao intervalo  $[\mu_i - \alpha\mu_i, \mu_i + \alpha\mu_i]$  cobrindo um domínio centrado nos valores médios de referência das variáveis aleatórias. Este método permite uma exploração uniforme dos valores do domínio necessária ao desenvolvimento do modelo da RNA.

- Para cada ponto do UDM são obtidos: o número de Tsai crítico  $\bar{R}$  associado ao ponto de falha mais provável (MPP), o índice de fiabilidade  $\beta$  e as suas sensibilidades, tomando como referência a carga máxima previamente calculada para o valor médio  $\mu_i$ . O método de Lind-Hasofer é usado para a determinação do índice de fiabilidade. A análise de sensibilidades é realizada usando o método da variável adjunta.
- É desenvolvida uma RNA, usando uma aprendizagem supervisionada baseada em pesquisa evolucionária. Os pontos gerados pelo UDM e os correspondentes valores resposta são usados como conjuntos de valores experimentais de entrada/saída no processo de aprendizagem da RNA.
- Usando a rede “ótima” desenvolvida, é feita uma análise global de sensibilidades usando os índices de Sobol.

A Figura 1 mostra o modelo numérico desenvolvido.

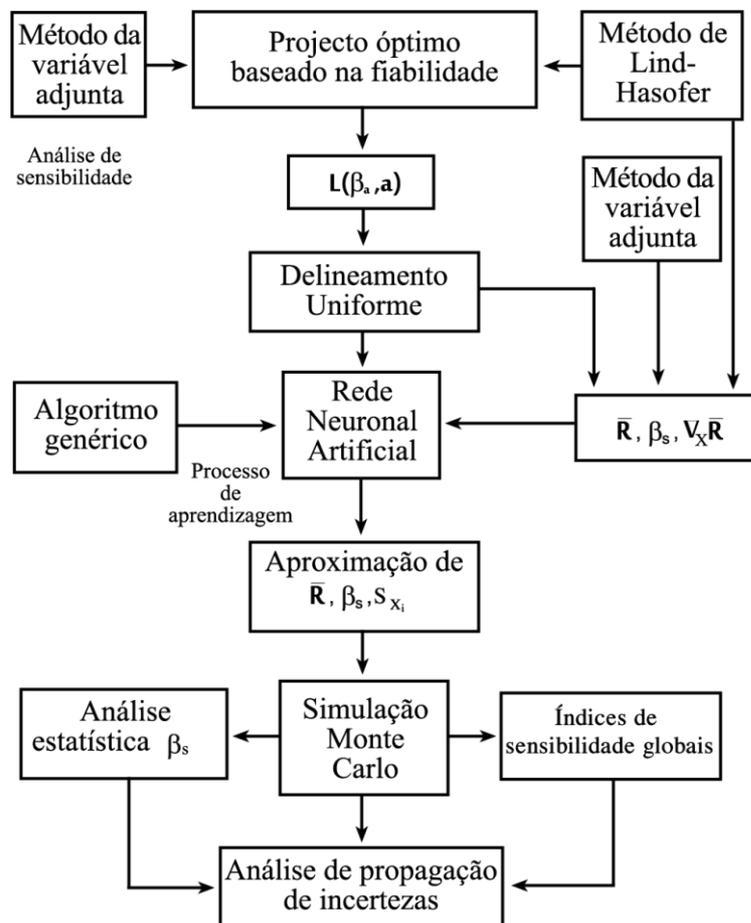


Fig. 1 | Modelo numérico desenvolvido.

Para um nível de fiabilidade especificado  $\beta_a$ , o problema de fiabilidade inverso é descrito pela equação

$$\min_{\lambda, a} [\beta_s(\lambda, a, \mathbf{x}) - \beta_a]^2 \quad \text{sujeito a} \quad 0 \leq a \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

onde  $\beta_s$  é o índice de fiabilidade estrutural.

O vetor das cargas aplicadas é definido por  $L = \lambda L^{ref}$ , onde  $L^{ref}$  é o vetor carga de referência. Para determinar o índice de fiabilidade estrutural  $\beta_s$  é aplicado o método de Lind-Hasofer e um esquema iterativo apropriado baseado em gradientes (António e Hoffbauer, 2010).

O número de Tsai,  $R_k$ , definido como sendo a razão entre a tensão máxima admissível e a tensão aplicada, é obtido do critério de falha iterativo de Tsai-Wu calculado no k-ésimo ponto da estrutura resolvendo a equação

$$1 - (F_{ij}s_i s_j)R_k^2 - (F_i s_i)R_k = 0 \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (2)$$

onde  $s_i$  são as componentes do vetor tensão e  $F_{ij}$  e  $F_i$  são os parâmetros de resistência associados com os laminados reforçados unidirecionais definidos de um ponto de vista macro-mecânico. A superfície estado limite  $G(\mathbf{x})$  que separa o domínio de falha do domínio de segurança pode ser escrita na forma  $G(\mathbf{x}) = \bar{R} - 1$  onde  $\bar{R}$  é o número de Tsai crítico definido na equação

$$\bar{R} = \min(R_1, \dots, R_k, \dots, R_{N_s}) \quad (3)$$

sendo  $N_s$  o número total de pontos onde o vetor tensão é calculado.

A localização destes pontos depende da metodologia do pós-processamento usada na análise estrutural. Nesta abordagem, é usado o MEF e então estes pontos coincidem com os pontos de Gauss da integração numérica.

### 3- DELINEAMENTO UNIFORME

Nos últimos anos têm sido propostos vários métodos de planeamento de experiências para resolver problemas industriais. O objetivo do planeamento de experiências (*design of experiments*) é o de descobrir uma relação entre a resposta e as variáveis de entrada, com o menor custo possível. A chave para este problema é determinar um conjunto de pontos (no domínio das variáveis de entrada) que permitam estimar de modo eficiente o valor esperado da resposta. Há dois tipos de abordagem para esta questão:

- Abordagem estocástica: do ponto de vista da estatística, pretende encontrar-se um planeamento tal que a média da amostra é um estimador não enviesado ou assintoticamente não enviesado da média real com a menor variância possível. Um exemplo desta abordagem é o método do Hipercubo Latino.
- Abordagem determinística: de um ponto de vista determinístico, pretende encontrar-se uma amostra tal que a diferença entre a média da amostra e a média real seja tão pequena quanto possível. A desigualdade de Koksma-Hlawka majora o erro do valor esperado da resposta. Esse majorante é o produto entre o valor da variação total da resposta e a discrepância do conjunto dos pontos no domínio das variáveis de entrada. Esta desigualdade indica que, quanto maior for a uniformidade dos pontos, menor é o erro.

Interessa, pois, determinar pontos uniformemente dispersos no domínio das variáveis de entrada. Esta abordagem é designada por delineamento uniforme (*Uniform Design Method*, UDM).

Fang e Wang (1993) foram os primeiros a aplicar os métodos quasi-Monte Carlo ao planeamento de experiências, propondo uma então nova técnica, o delineamento uniforme. Esta técnica surgiu da necessidade de encontrar uma maneira de conseguir a máxima informação possível usando relativamente poucos pontos experimentais.

A ideia chave do UDM é a de encontrar um conjunto de pontos que estejam uniformemente dispersos no hipercubo unitário  $s$ -dimensional  $C^s$ . Com efeito, o UDM pode ser considerado como uma versão do planeamento de experiências com o objetivo de minimizar a discrepância. Neste contexto, a discrepância é usada como uma medida de uniformidade de dispersão. Seja  $P$  um conjunto de  $n$  pontos em  $C^s$ . Para todo  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_s)$  seja  $N(\mathbf{g}, P)$  o número de pontos contidos no hipercubo  $[0, g_1] \times [0, g_2] \times \dots \times [0, g_s]$ .

Então

$$D(n, P) = \sup_{\mathbf{g} \in C^s} \left| \frac{N(\mathbf{g}, P)}{n} - g_1 g_2 \dots g_s \right| \quad (4)$$

é chamada discrepância de  $P$ .

O quociente  $\frac{N(\mathbf{g}, P)}{n}$  representa a percentagem de pontos que cai no hipercubo  $[0, g_1] \times [0, g_2] \times \dots \times [0, g_s]$  enquanto  $g_1 g_2 \dots g_s$  é o volume deste hipercubo. Como o volume total é unitário,  $g_1 g_2 \dots g_s$  representa a percentagem de volume ocupada pelos  $n$  pontos. A medida  $D(n, P)$  é um bom índice, pois é de esperar que, quanto maior for a uniformidade da dispersão no conjunto  $P$ , menor será a diferença entre  $\frac{N(\mathbf{g}, P)}{n}$  e  $g_1 g_2 \dots g_s$ . Conforme a norma usada, assim são obtidas várias medidas de discrepância.

O método do delineamento uniforme impõe que todos os pontos estejam uniformemente distribuídos em todas as direções, enquanto que, no método do Hipercubo Latino, os pontos estão uniformemente distribuídos em cada direção. A construção de um delineamento uniforme com  $n$  amostras e  $s$  fatores é um problema complicado do ponto de vista computacional. Por isso, foram propostos métodos de construção como, por exemplo, o método “*good lattice point*” (glp). Baseado neste método, o UDM disponibiliza muitas tabelas que nos dão os valores no domínio das variáveis de entrada que deveremos considerar, de modo a obter pontos uniformemente dispersos nesse domínio. Uma tabela UDM é representada por  $U_n(q^s)$ , em que  $U$  denota o UDM,  $n$  o número de amostras,  $q$  o número de níveis de cada variável de entrada e  $s$  o número máximo de colunas da tabela.

De notar que, nestas tabelas, podem ser escolhidas diferentes colunas, o que resulta em discrepâncias diferentes. Como resultado disto, para cada tabela do método do delineamento uniforme está associada uma tabela acessória que inclui recomendações relativamente às colunas que devem ser escolhidas para obter menor discrepância de acordo com o número de variáveis de entrada.

## 4- RNA DESENVOLVIDA

A RNA proposta é constituída por três camadas de nós (neurónios): a camada de entrada, a camada intermédia ou escondida e a camada de saída. A ligação entre os neurónios de entrada e os da camada intermédia e entre os da camada intermédia e os neurónios de saída são designados por sinapses. Estas são ligações ponderadas que estabelecem a relação entre os dados de entrada,  $D_i^{inp}$  e os dados de saída  $D_j^{out}$ . Na RNA desenvolvida, o vetor dos dados de entrada,  $\mathbf{D}^{inp}$ , é definido por um conjunto de valores de variáveis aleatórias que são as propriedades mecânicas dos compósitos laminados tais como as propriedades elásticas ou de resistência. O módulo de elasticidade longitudinal  $E_1$ , o módulo de elasticidade transversal  $E_2$ , a resistência transversal em tração,  $Y$  e a resistência ao corte,  $S$ , são considerados como variáveis de entrada da rede e são denotadas por  $\mathbf{X} = [E_1, E_2, Y, S]$ .

Nesta abordagem, cada conjunto de valores para o vetor aleatório  $\mathbf{X}$  é selecionado usando o delineamento uniforme. O correspondente vetor de dados de saída  $\mathbf{D}^{out}$  contém o número de Tsai crítico,  $\bar{R}$ , o índice de fiabilidade estrutural,  $\beta_s$ , e as sensibilidades relativas.

## 5- ÍNDICES DE SOBOL

Considerando que  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  são  $n$  variáveis aleatórias não correlacionadas e  $\Psi_m$  o funcional da resposta previamente definido, um indicador de importância da variável de entrada  $X_i$  pode ser baseado na variância de  $\Psi_m$  se se fixar  $X_i$  no seu verdadeiro valor  $x_i^*$ , isto é:  $V(\Psi_m | X_i = x_i^*)$ . Esta é a variância de  $\Psi_m$  condicionada a  $X_i = x_i^*$ . A variável  $X_i$  que leva a uma maior redução na variância de  $\Psi_m$  quando se fixa  $X_i$  no seu verdadeiro valor  $x_i^*$ , é a mais importante. No entanto, como na generalidade dos casos não é conhecido o verdadeiro valor  $x_i^*$  de  $X_i$ , ultrapassa-se esta dificuldade considerando a média da variância condicionada sob todas os possíveis valores  $x_i^*$  de  $X_i$ , ou seja,  $E(V(\Psi_m | X_i))$ , cujo valor é tanto maior quanto menos importante for  $X_i$ . Considerando a seguinte propriedade algébrica

$$V(\Psi_m) = V(E(\Psi_m | X_i)) + E(V(\Psi_m | X_i)) \quad (5)$$

verifica-se que, ao menor valor de  $E(V(\Psi_m | X_i))$ , corresponde o maior valor de  $V(E(\Psi_m | X_i))$ .

O valor de  $V(E(\Psi_m | X_i))$  pode ser usado como um indicador da importância de  $X_i$  na variância de  $\Psi_m$ . Este indicador é diretamente proporcional à importância de  $X_i$ . O índice normalizado associado é

$$S_i = \frac{V(E(\Psi_m | X_i))}{V(\Psi_m)} \quad (6)$$

denominado índice de sensibilidade de primeira ordem de Sobol (António e Hoffbauer, 2013; Saltelli et al., 2008).

## 6- EXEMPLO NUMÉRICO

Consideremos um painel compósito com a forma de uma asa de avião representado na Figura 2.

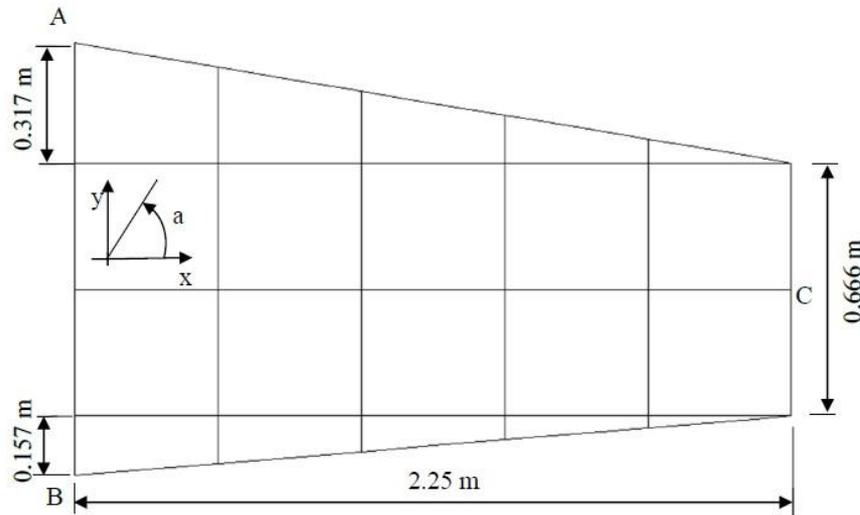


Fig. 2 | Definição geométrica do painel compósito com a forma de uma asa de avião.

A espessura do painel é de 0,015 m. A estrutura é encastrada no lado linear (AB) e livre nos restantes lados. É aplicada uma carga vertical com direção perpendicular relativamente ao plano OXY no ponto C. A estrutura é constituída por um laminado do sistema compósito carbono/resina de epóxico. Um laminado do tipo *angle-ply* balanceado, com oito camadas e a sequência de empilhamento  $[+a/ - a/ + 45^\circ/ - 45^\circ]_s$  numa construção simétrica. O ângulo da camada  $a$  é medido relativamente ao eixo dos  $xx$  do sistema de eixos de referência. Todas as camadas têm a mesma espessura. O elemento finito de casca é usado na análise estrutural. O índice de fiabilidade especificado é  $\beta_a = 3$  e o coeficiente de variação de cada variável aleatória é fixado em  $C.V.(X) = 6\%$  relativamente ao seu valor médio.

As variáveis aleatórias não correlacionadas são as propriedades mecânicas  $X = (E_1, E_2, Y, S)$  com a distribuição seguinte:  $E_1 \sim N(181.000, 10.860)GP_a$ ,  $E_2 \sim N(10.300, 0.618)GP_a$ ,  $Y \sim N(40.000, 2.400)MP_a$ ,  $S \sim N(6.800, 4.080)MP_a$ .

A carga máxima obtida pela resolução do problema inverso formulado em 1 é calculada em função do ângulo das camadas e são obtidos os valores apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 | Cargas de referência na análise da propagação de incertezas

Ângulo	0°	15°	30°	30°	60°	75°	75°
Carga máxima [N]	10412.5	9818.2	4785.6	2683.6	1298.15	1004.9	822.45

Considere-se a Tabela  $U_{2,7}(27^{10})$  do UDM onde são selecionadas as colunas 1, 4, 6, 9 de acordo com o que é sugerido pela tabela acessória respetiva para quatro variáveis aleatórias e com discrepância  $D(n, P) = 0.1189$ . Os pontos definidos pelo UDM são considerados como valores experimentais de entrada a serem usados no processo de aprendizagem da RNA (Figura 3).

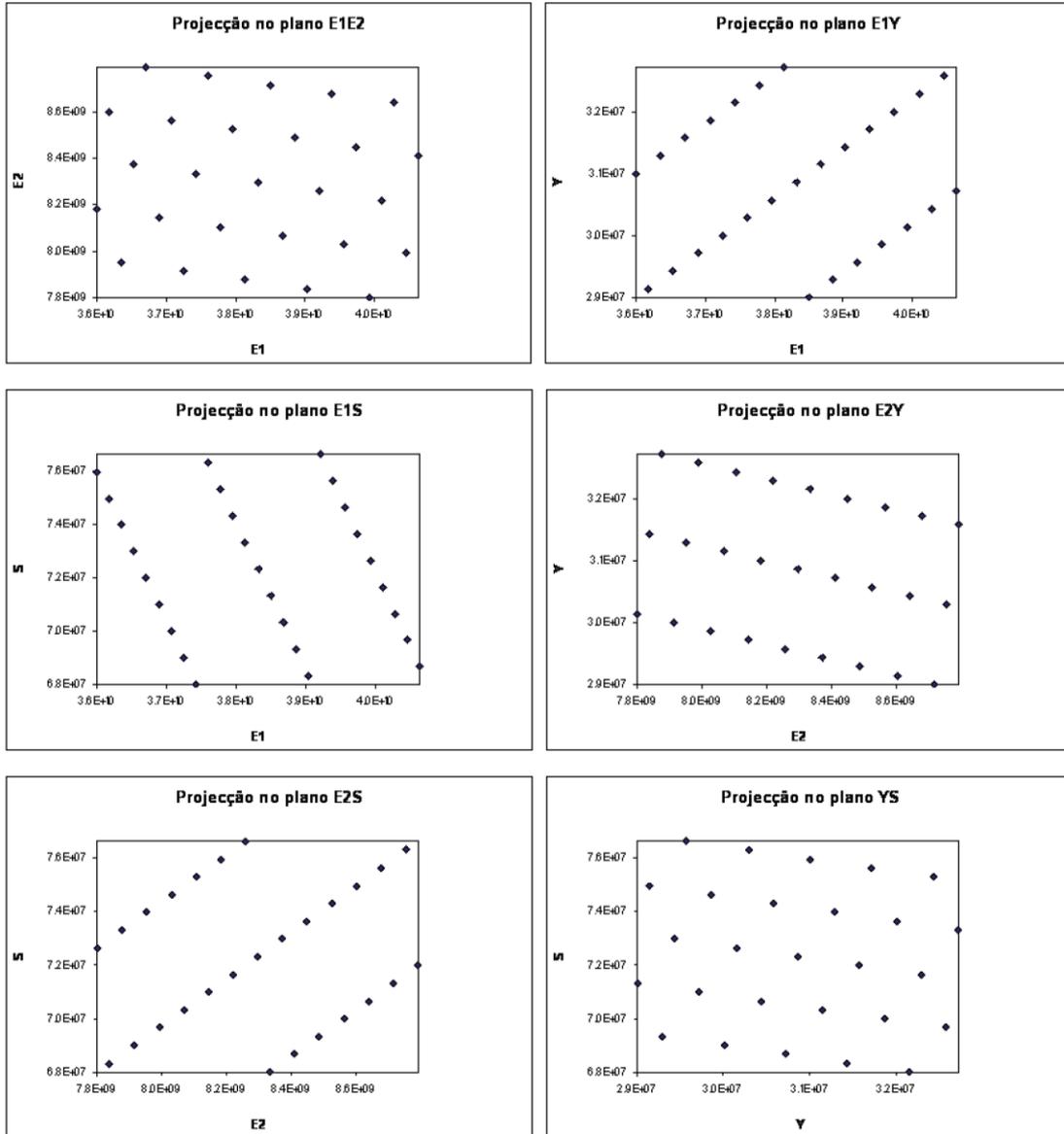


Fig. 3 | Valores experimentais de entrada usados no processo de aprendizagem da RNA baseada no UDM

Neste trabalho, calculou-se a resposta num conjunto de pontos, utilizando técnicas de Monte Carlo. O método de simulação de Monte Carlo, baseado na RNA desenvolvida, foi usado para obter os índices de Sobol de primeira ordem. No exemplo considerado: 4 variáveis aleatórias, 50 valores condicionados para a variável  $x_i$  e, para cada valor de  $x_i$ , 100 valores aleatórios para as restantes variáveis, num total de 20 000 simulações (Figura 4).

Após a obtenção da RNA ótima para o painel compósito, as variáveis de entrada são ordenadas em função da sua importância baseada nos índices de Sobol (Tabelas 2 e 3).

A variável aleatória mais importante na explicação da variabilidade do número de Tsai é a resistência transversal, Y, para todo o domínio do ângulo das camadas. Também a resistência ao corte, S, é importante no intervalo  $[15^\circ, 45^\circ]$ . O módulo elástico longitudinal,  $E_1$ , tem uma importância relevante no intervalo  $[45^\circ, 75^\circ]$  e o módulo elástico transversal,  $E_2$ , é importante em todo o domínio do ângulo das camadas  $\alpha$ , exceto para  $75^\circ$ .

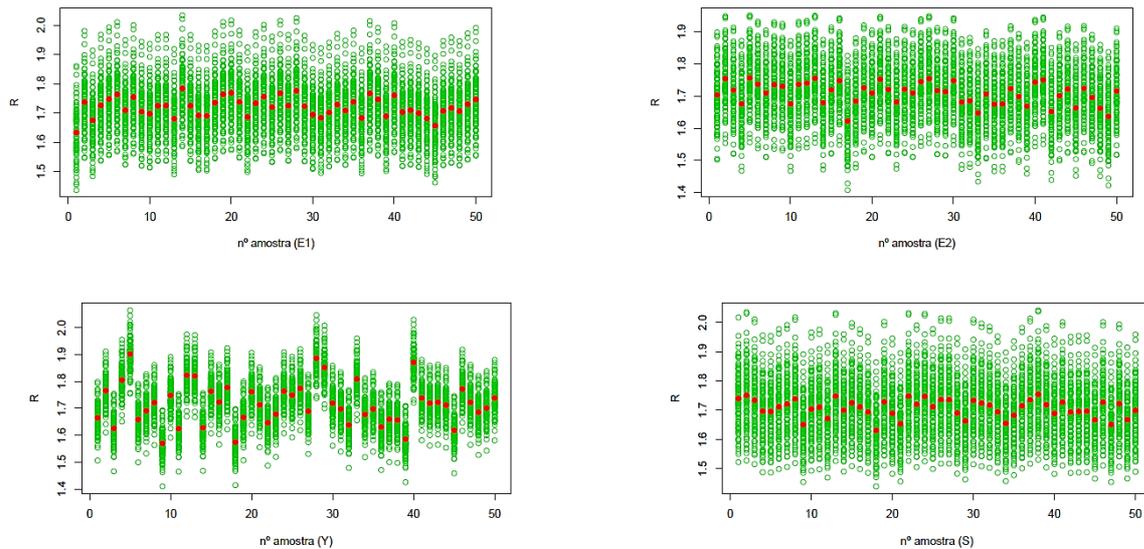


Fig. 4 | Simulação de Monte Carlo.

Tabela 2 | Ordenação dos parâmetros de entrada segundo a sua importância na resposta,  $\bar{R}$ , utilizando os índices de Sobol.

Ordenação	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
1°	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
2°	$E_2$	$E_2$	S	$E_1$	$E_2$	$E_1$	$E_2$
3°	S	S	$E_2$	S	$E_1$	S	S
4°	$E_1$	$E_1$	$E_1$	$E_2$	S	$E_2$	$E_1$

Tabela 3 | Ordenação dos parâmetros de entrada segundo a sua importância na resposta,  $\beta$ , utilizando os índices de Sobol.

Ordenação	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
1°	Y	Y	S	Y	Y	Y	Y
2°	$E_2$	S	Y	$E_1$	$E_2$	$E_1$	$E_2$
3°	$E_1$	$E_2$	$E_2$	S	$E_1$	$E_2$	$E_1$
4°	S	$E_1$	$E_1$	$E_2$	S	S	S

## 7- CONCLUSÕES

Foi realizado um estudo da influência da anisotropia na propagação de incertezas nos compósitos, baseado nas metodologias propostas. Com base nos resultados numéricos, são determinadas e discutidas medidas de importância dos parâmetros de entrada na resposta estrutural, em função da anisotropia dos materiais compósitos. A análise de propagação de incertezas é muito útil no projeto de estruturas compósitas laminadas, minimizando os efeitos indesejáveis das incertezas dos parâmetros de entrada na fiabilidade estrutural. Neste contexto, modelo numérico proposto revelou-se promissor.

## REFERÊNCIAS

- António, C. and Hoffbauer, L. (2010) Uncertainty propagation in inverse reliability-based design of composite structures. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 6, 89-102.
- António, C. and Hoffbauer, L. (2013) Uncertainty assessment approach for composite structures based on global sensitivity indices. *Composite Structures*, 99, 202-212.
- Fang, L. and Wang, Y. (1993) *Global Sensitivity Analysis*. Wiley.
- Saltelli, A. et al. (2008) *Global Sensitivity Analysis - The Primer*. John Wiley and Sons, Ltd.