

# ESTIMAÇÃO E VALIDAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA ESTRUTURAL PELO MÉTODO DE MONTE CARLO – FORMULAÇÕES CLÁSSICA E BAYESIANA

## ESTIMATION AND VALIDATION OF THE PROBABILITY OF STRUCTURAL FAILURE BY THE MONTE CARLO METHOD - CLASSIC AND BAYESIAN FORMULATIONS

Luísa N. Hoffbauer<sup>1</sup>, Carlos C. António<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LAETA/INEGI, Instituto Superior de Engenharia do Porto,

<sup>2</sup>LAETA/INEGI, Faculty of Engineering, University of Porto

Email: [1nh@isep.ipp.pt](mailto:1nh@isep.ipp.pt); [2cantonio@fe.up.pt](mailto:2cantonio@fe.up.pt)

### RESUMO

*Um dos principais problemas na análise da fiabilidade estrutural dos compósitos laminados é a possível existência de múltiplos MPP (Most Probable failure Point). O problema é similar ao da existência de vários mínimos locais em otimização de estruturas. Com efeito, um MPP local pode não corresponder à situação mais desfavorável, em termos de probabilidade, de falha da estrutura. Neste trabalho utiliza-se o método de Hasofer-Lind para o cálculo da probabilidade de falha para várias cargas fixas. Para validar os resultados obtidos através desta metodologia, são utilizados o método clássico e o método Bayesiano usando simulação de Monte Carlo. O processo de validação demonstra que há concordância entre os métodos utilizados para estimar a probabilidade de falha das estruturas compósitas laminadas.*

**Palavras chave:** Estruturas compósitas, probabilidade de falha, Método de Hasofer-Lind, Simulação de Monte Carlo, Inferência Bayesiana.

### ABSTRACT

*One of the main problems in structural reliability analysis of laminated composites is the possible existence of multiple MPP (Most Probable failure Point). The problem is similar to the existence of several local minima in structural optimization. Indeed, a local MPP may not correspond to the most unfavorable situation, in terms of failure probability of the structure. In this work, it is used the Hasofer-Lind method to calculate the probability of failure for several fixed loads. To validate the results obtained through this methodology, the classical method and the Bayesian method using Monte Carlo simulation are considered. Using a particular example, the validation process demonstrates an agreement between both methods to estimate the probability of failure of the laminated composite structures.*

**Keywords:** Composite structures, probability of failure, Hasofer-Lind method, Monte Carlo simulation, Bayesian inference.

## 1. INTRODUÇÃO

A análise mais realista de falhas de estruturas sobre incertezas está associada ao uso de métodos probabilísticos. A análise probabilística da integridade estrutural ou fiabilidade estrutural toma em consideração as incertezas existentes nas variáveis e parâmetros de projeto de estruturas em engenharia e estuda o impacto que estas incertezas têm na caracterização da falha desses sistemas físicos. Desde sempre se reconheceu que uma das dificuldades da análise da fiabilidade estrutural era o cálculo dos integrais envolvidos na estimação da probabilidade de falha. Os trabalhos de Hasofer e Lind [1] desempenharam um papel importante no desenvolvimento de métodos aproximados para o cálculo dessa probabilidade. Os métodos aproximados anteriores usam o chamado ponto de falha mais provável (MPP). A pesquisa deste ponto é um problema de otimização que envolve técnicas baseadas em gradientes, pesquisa evolucionária ou outras. Quando os métodos utilizados se baseiam em gradientes, é-se confrontado com a possibilidade de existência de múltiplos pontos de falha, ou seja, múltiplos ótimos locais [2,3]. Este problema é exacerbado quando o número de variáveis aleatórias envolvidas é grande ou quando o grau de não linearidade das funções de estado limite associadas à resposta do sistema estrutural é elevado. Neste caso, não há garantia de que a fiabilidade estrutural tenha sido corretamente avaliada. De forma a ultrapassar estas possíveis dificuldades, são propostas aproximações complementares como, por exemplo, o método de Monte Carlo. Estas aproximações complementares são usadas essencialmente para fornecer valores de referência com vista à validação dos resultados obtidos pelos métodos anteriores.

## 2. CONCEITOS FUNDAMENTAIS DE FIABILIDADE ESTRUTURAL

O problema fundamental da Fiabilidade Estrutural consiste no cálculo do seguinte integral:

$$p_f = P(G(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

onde  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$  é um vetor aleatório definido no espaço de

probabilidade,  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  onde  $\Omega$  é o espaço amostral podendo ser identificado como o conjunto de todos os cenários de projeto estrutural,  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra dos subconjuntos de  $\Omega$  and  $P$  é a medida de probabilidade. O vetor  $\mathbf{X}$  representa as variáveis aleatórias que contêm informação sobre as incertezas que afetam a segurança da estrutura em consideração e  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  é a função densidade de probabilidade conjunta de  $\mathbf{X}$ .

Para cada realização de  $\mathbf{X}$ , o estado da estrutura pode ser de segurança ou de falha. O estado de falha ocorre quando uma realização de  $\mathbf{X}$  se encontra no domínio de falha definido por  $D_f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: G(\mathbf{x}) \leq 0\}$ . A função  $G(\mathbf{X}, \Psi(\mathbf{X}))$  é designada por função estado limite e depende das variáveis de entrada,  $\mathbf{X}$ , e da resposta,  $\Psi(\mathbf{X})$ . O conjunto  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n: G(\mathbf{x}) = 0\}$  define a superfície estado limite, representando a fronteira entre o domínio de falha e o domínio de segurança. A resposta  $\Psi(\mathbf{X})$  do sistema estrutural é muitas vezes obtida por códigos computacionais como, por exemplo, o MEF [2,3]. Ou seja, o domínio de falha é definido implicitamente como uma função de  $\mathbf{X}$ . Por isso, o cálculo do integral da equação (1) não é fácil, o que obriga ao desenvolvimento de métodos aproximados.

Neste estudo, as variáveis aleatórias são as propriedades mecânicas da estrutura compósita laminada, consideradas não correlacionadas e a função estado limite é dada por:

$$G(\mathbf{x}) = \bar{R} - 1 \quad (2)$$

$\bar{R}$  é o número de Tsai crítico definido por

$$\bar{R} = \min(R_1, \dots, R_k, \dots, R_{N_s}) \quad (3)$$

sendo  $N_s$  o número total de pontos onde o vetor tensão é calculado. O número de Tsai,  $\bar{R}$ , definido como sendo a razão entre a tensão máxima admissível e a tensão aplicada, é obtido do critério de falha iterativo de Tsai-Wu [2,3,4] e calculado no  $k$ -ésimo ponto da estrutura, resolvendo a equação

$$1 - (F_{ij}s_i s_j) R_k^2 - (F_i s_i) R_k = 0 \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4)$$

onde  $s_i$  são as componentes do vetor tensão,  $F_{ij}$  e  $F_i$  são os parâmetros de resistência associados com os laminados reforçados unidimensionais definidos do ponto de vista macromecânico.

Aproximações adequadas para determinar o integral na equação (1), dependem da forma da superfície estado limite, assim como da função densidade de probabilidade conjunta e da dimensão do problema. Foram desenvolvidos métodos de fiabilidade baseados em aproximações de primeira ou segunda ordem, que deram origem aos métodos FORM (*first order reliability method*) e SORM (*second order reliability method*), respetivamente [5]. A distinção entre estes métodos baseia-se na existência, ou não, da correção da curvatura da superfície estado limite. Os métodos sem correção da curvatura são designados por FORM e os outros por SORM.

### 3. DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA PELO MÉTODO DE HASOFER-LIND

De um ponto de vista operacional, o problema de fiabilidade é definido de acordo com os seguintes passos:

- Após a projeção da função estado limite no espaço normal padronizado a probabilidade de falha é dada por:

$$p_f = \int_{g(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (5)$$

onde  $\varphi(\mathbf{u})$  é a função densidade de probabilidade da multinormal padronizada. Os pontos que mais contribuem para o integral na equação (5) são aqueles do domínio de falha que estão mais próximos da origem.

- Determinação do ponto na superfície estado limite mais próximo da origem  $\mathbf{u}^*$  designado por MPP que é solução do seguinte problema de otimização:

$$\mathbf{u}^* = \min_{g(\mathbf{u})=0} \|\mathbf{u}\| \quad (6)$$

Vários algoritmos estão disponíveis para resolver o problema de otimização anterior como, por exemplo, o algoritmo de Rackwitz-Fiessler ou o algoritmo HLRF [5].

Após a determinação do MPP, o correspondente índice de fiabilidade é definido como

$$|\beta| = \|\mathbf{u}^*\| \quad (7)$$

- Aproximação da superfície estado limite utilizando aproximações de primeira ou segunda ordem, FORM e SORM, respetivamente.

- Cálculo da probabilidade de falha no FORM

$$p_f = \int_{g(\mathbf{u}) \leq 0} \varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \approx \Phi(-\beta) \quad (8)$$

A Figura 1 adaptada de [6] apresenta as duas transformações para obtenção do MPP.

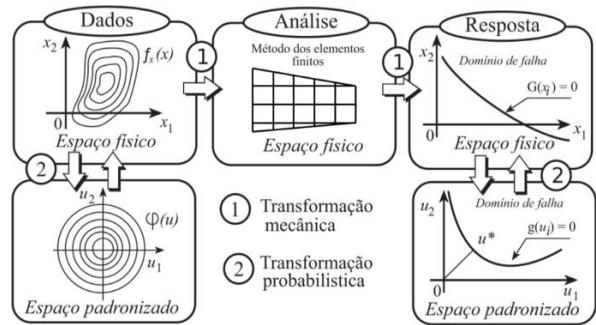


Fig. 1 - Transformações usadas na procura do MPP.

### 4. DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA PELO MÉTODO DE MONTE CARLO-VERSÃO CLÁSSICA

A utilização do Método de Monte Carlo é uma alternativa aos métodos numéricos para a resolução de integrais, particularmente em cenários multidimensionais [7], como é o caso da probabilidade de falha dada pela equação (1). O método de Monte Carlo tradicional, para resolver a equação (1), requer a geração de  $N$  valores aleatórios de  $\mathbf{X}$ ,  $\{\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(N)}\}$  e o cálculo de  $G(\mathbf{x}^{(i)})$  para todo o  $\mathbf{x}^{(i)}$ . A probabilidade de falha é então estimada como sendo a razão entre o número de ocorrências com  $G(\mathbf{x}^{(i)}) \leq 0$  e o número total de valores  $N$ . Em termos matemáticos:

$$p_f = P(G(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d = \int_{\mathcal{R}^n} I(G(\mathbf{x})) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d = E(I(G(\mathbf{x}))) \quad (9)$$

em que  $I(G(\mathbf{x}))$  representa a função indicatriz do domínio de falha, isto é, toda com o valor 0 no domínio de segurança e o valor 1 no domínio de falha.

Um estimador de  $p_f = I(G(\mathbf{x}))$  é dado por

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(G(\mathbf{X}^{(i)})) \quad (10)$$

Este estimador tem média  $E(\hat{P}_f) = p_f$  e variância  $V(\hat{P}_f) = \frac{p_f(1-p_f)}{N}$ . Uma realização do estimador  $\hat{P}_f$  é uma estimativa denotada por

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(G(\mathbf{x}^{(i)})) = \frac{k}{N} \quad (11)$$

em que  $k$  é o número de falhas e  $N$  o número de simulações.

Um intervalo de confiança exato, com grau de confiança  $(1 - \alpha) \times 100\%$ , dado o valor observado  $x$ ,  $0 \leq x \leq N$  é  $(p_f^{min}, p_f^{max})$  tal que:

$$\sum_{m=k}^N \binom{N}{m} (p_f^{min})^m (1 - p_f^{min})^{N-m} = \frac{\alpha}{2} \quad (12)$$

$$\sum_{m=0}^k \binom{N}{m} (p_f^{max})^m (1 - p_f^{max})^{N-m} = \frac{\alpha}{2} \quad (13)$$

A determinação deste intervalo é efetuada por tentativas e, por isso, é muito trabalhoso. Este trabalho pode ser reduzido considerando a relação da distribuição Binomial com a distribuição Beta e tirando partido da relação da Beta com a F de Snedor.

Um intervalo de confiança a  $(1 - \alpha) \times 100\%$ ,  $(p_f^{min}, p_f^{max})$  é então dado por

$$p_f^{min} = \frac{1}{1 + \frac{N - k + 1}{k} F^*} \quad (14)$$

$$p_f^{max} = \frac{\frac{k + 1}{N - k} F^{**}}{1 + \frac{k + 1}{N - k} F^{**}} \quad (15)$$

onde

$$P(F_{2(N-k+1), 2k} > F^*) = \frac{\alpha}{2}$$

e

$$P(F_{2(k+1), 2(N-k)} > F^{**}) = \frac{\alpha}{2}.$$

## 5. DETERMINAÇÃO DA PROBABILIDADE DE FALHA PELO MÉTODO DE MONTE CARLO – VERSÃO BAYESIANA

No modelo Bayesiano, o parâmetro  $p_f$ , por ser desconhecido, é incerto e, como tal, deve ser quantificado em termos de probabilidade [7]. Como consequência, os Bayesianos procuram construir intervalos de credibilidade, ou seja, intervalos que admitem uma interpretação probabilística direta, em contraste com os intervalos de confiança clássicos. Nos intervalos de confiança clássicos, considera-se o parâmetro a estimar fixo e os limites aleatórios; nos Bayesianos, o parâmetro a estimar é que é a variável aleatória e os limites são fixos.

De acordo então com a formulação Bayesiana, na estimação do parâmetro  $\theta$ , a distribuição *a posteriori*  $h_{\theta|\mathbf{x}}(\theta|\mathbf{x})$  é o produto da verossimilhança da amostra  $f_{\mathbf{x}|\theta}(\mathbf{x}|\theta)$  pela distribuição *a priori*  $g_{\theta}(\theta)$  a menos de uma constante. Para o caso particular em que o parâmetro a estimar é a probabilidade de falha,  $p_f$ , [8] pelo teorema de Bayes, a distribuição *a posteriori* de  $p_f$ ,  $h_{p_f|k,N}(p_f|k, N)$  é dada por

$$h_{p_f|k,N}(p_f|k, N) = \frac{f_{k,N|p_f}(k, N|p_f)g_{p_f}(p_f)}{\int_0^1 f_{k,N|p_f}(k, N|p_f)g_{p_f}(p_f)dp_f} \quad (16)$$

onde  $k$  é o número de falhas e  $N$  o número de simulações,  $g_{p_f}(p_f)$  é a distribuição *a priori* e deve pertencer a uma família tal que a distribuição *a posteriori*  $h_{\theta|\mathbf{x}}(\theta|\mathbf{x})$  é da mesma família. Para a verossimilhança da amostra, tem-se o modelo binomial

$$\begin{aligned} f_{k,N|p_f}(k, N|p_f) &= \\ &= \binom{N}{k} (p_f)^k (1 - p_f)^{N-k}, k = 0, 1, \dots, N \end{aligned} \quad (17)$$

donde se deduz que a distribuição *a priori* deve ser uma Beta.

A distribuição *a posteriori* para uma verossimilhança binomial e uma *a priori* Beta é

$$h_{p_f|k,N}(p_f|k,N) = \begin{cases} \frac{1}{B(a+k, N-k+b)} (p_f)^{\alpha+k+1} (1-p_f)^{N-k+b-1}, & 0 \leq p_f \leq 1 \\ 0, & \text{outros valores} \end{cases} \quad (18)$$

que é uma distribuição  $Beta(k+a, N-k+b)$  com valor médio  $E(p_f|k,N) = \frac{k+a}{N+a-b}$  e variância  $V(p_f|k,N) = \frac{(a+k)(b+N-k)}{(a+b+N)^2(a+b+N+1)}$ .

Um intervalo de credibilidade com grau de credibilidade  $(1-\alpha) \times 100\%$  é dado por  $(p_{fmin}, p_{fmax})$  com  $p_{fmin}$  dado por

$$\int_0^{p_{fmin}} Beta(k+a, N-k+b) dp_f = \frac{\alpha}{2} \quad (19)$$

e  $p_{fmax}$  tal que:

$$\int_{p_{fmax}}^1 Beta(k+a, N-k+b) dp_f = \frac{\alpha}{2} \quad (20)$$

Considerando que não se possui qualquer informação inicial que nos permita distinguir entre os diferentes valores no intervalo de 0 a 1, parece natural que o modelo apropriado para  $g_{p_f}(p_f)$  siga distribuição uniforme,  $p_f \sim Beta(1,1)$ . A distribuição *a posteriori* é uma distribuição  $Beta(k+1, N-k+1)$ . Um intervalo de credibilidade com grau de credibilidade  $(1-\alpha) \times 100\%$  é dado por  $(p_{fmin}, p_{fmax})$  com  $p_{fmin}$  tal que

$$\int_0^{p_{fmin}} Beta(k+1, N-k+1) dp_f = \frac{\alpha}{2} \quad (21)$$

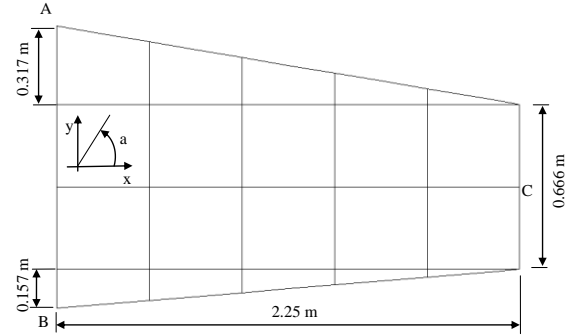
e  $p_{fmax}$  é tal que

$$\int_{p_{fmax}}^1 Beta(k+1, N-k+1) dp_f = \frac{\alpha}{2} \quad (22)$$

## 6. RESULTADOS

Consideremos um painel compósito da asa de um avião representado na Figura 2. A espessura do painel é de 0.015 m. A estrutura é encastrada nos lados lineares (AB) e livre nos

lados opostos. É aplicada uma carga vertical com direção perpendicular relativamente ao plano OXY no ponto C. A estrutura é constituída por um laminado do sistema compósito carbono/resina de epóxico. Um laminado angle-ply balanceado com oito camadas e sequência de empilhamento  $[+75^\circ/-75^\circ/+45^\circ/-45^\circ]$  impondo condições de simetria. O ângulo da camada é medido relativamente ao eixo dos  $x$  dos eixos coordenados de referência, conforme a Figura 2.



**Fig. 2** - Definição geométrica do painel compósito da asa de um avião.

Todas as camadas têm a mesma espessura. A análise estrutural é baseada no modelo de Elementos Finitos de casca desenvolvido por Ahmad [9], com desenvolvimentos posteriores por Figueiras [10]. Este elemento casca é obtido de um elemento tridimensional utilizando um processo degenerativo. É um elemento isoparamétrico com 8 nós e 5 graus de liberdade por nó - três translações e duas rotações, baseado na teoria de cascas de Mindlin.

O vetor das variáveis aleatórias é

$$\mathbf{X} = [E_1, E_2, Y, S]$$

onde

$$E_1 \sim \mathcal{N}(181.00, 10.860) \text{ GPa}$$

$$E_2 \sim \mathcal{N}(10.30, 0.618) \text{ GPa}$$

$$Y \sim \mathcal{N}(40.00, 2.400) \text{ MPa}$$

$$S \sim \mathcal{N}(68.00, 4.080) \text{ MPa}$$

Para avaliar a probabilidade de falha, é inicialmente aplicado o procedimento des-

crito nas equações (5) a (8). Os resultados obtidos para diferentes cargas estão representados na Tabela 1.

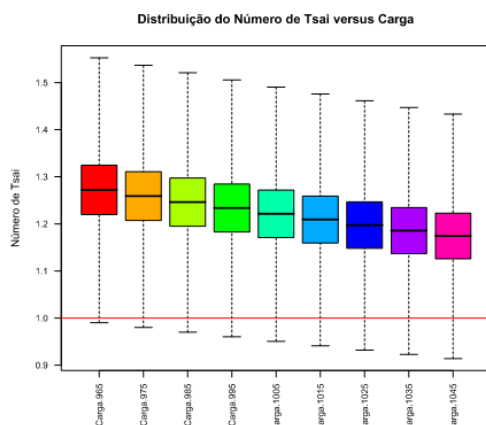
**Tabela 1** - Determinação da probabilidade de falha (Método de Hasofer-Lind)

Carga [N]	Índice de fiabilidade	Probabilidade de falha
964.704	3.549	0.000193523
974.753	3.411	0.000323132
984.802	3.274	0.000529924
994.851	3.137	0.000853572
1004.900	3	0.001350531
1014.949	2.863	0.002099327
1024.998	2.726	0.003205801
1035.047	2.589	0.004810686
1045.096	2.452	0.007094591

Os resultados representados na Tabela 1 vão ser validados usando o método de Monte Carlo (versão clássica e Bayesiana), estimando a probabilidade de falha,  $p_f$ , associada a cada uma das cargas anteriores.

O Método de simulação de Monte Carlo é usado para estudar o comportamento do número de Tsai. Analisando 10000 simulações, são obtidos diagramas de extremos e quartis em função das cargas (Figura 3). Os pontos abaixo da linha encontram-se na região de falha.

O método de simulação de Monte Carlo aplicado é a versão clássica, cujo procedimento é descrito nas equações (9) a (15). Analisando as 10000 simulações, estimamos a probabilidade de falha (Tabela 2) e comparamos com o método de Hasofer-Lind.



**Fig. 3** - Distribuição do Número de Tsai versus carga.

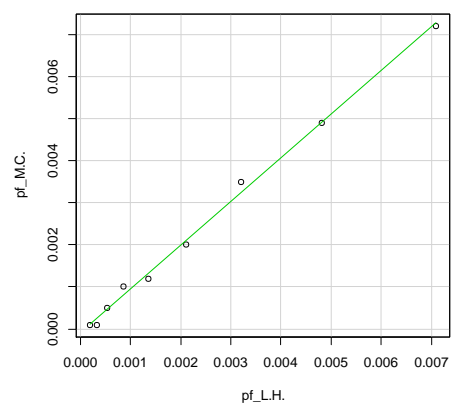
**Tabela 2** - Estimação da probabilidade de falha (Método de Monte Carlo-versão clássica).

Carga [N]	Número de falhas	Probabilidade de falha
964.704	1	0.0001
974.753	1	0.0001
984.802	5	0.0005
994.851	10	0.0010
1004.900	13	0.0013
1014.949	20	0.0020
1024.998	35	0.0035
1035.047	49	0.0049
1045.096	72	0.0072

Na Figura 4 está representado o diagrama de dispersão das probabilidades de falhas pelos dois métodos para as cargas consideradas. Podemos verificar a concordância dos dois métodos, pois os pontos ajustam-se à bissectriz dos quadrantes ímpares.

Utilizando as 10000 simulações anteriores, construímos intervalos de confiança (Método de Monte Carlo-versão clássica) e intervalos de credibilidade (Método de Monte Carlo-versão Bayesiana - equações (21) e (22)) a 95% para a probabilidade de falha. Os resultados obtidos estão representados nas tabelas 3 e 4.

Os intervalos obtidos são concordantes com os resultados obtidos pelo Método de Hasofer-Lind, pois as probabilidades de falha obtidas por este método pertencem aos intervalos encontrados. Os intervalos obtidos pelo Método de Monte Carlo - versão clássica e versão Bayesiana - são semelhan-



**Fig. 4** - Relação entre as probabilidades de falha obtidas pelos dois métodos.

**Tabela 3** - Intervalos de confiança para a probabilidade de falha (Método de Monte Carlo-versão clássica).

Carga [N]	Probabilidade de falha (I.C. 95%)
964.704	(0.0000025, 0.0005570)
974.753	(0.0000025, 0.0005570)
984.802	(0.0001623, 0.0011664)
994.851	(0.0004793, 0.0018383)
1004.900	(0.0006918, 0.0022220)
1014.949	(0.0012207, 0.0030872)
1024.998	(0.0024353, 0.0048643)
1035.047	(0.0036204, 0.0064729)
1045.096	(0.0056247, 0.0090587)

tes devido a ter sido utilizada uma distribuição *a priori* não informativa. No entanto, uma vantagem da versão Bayesiana é quantificar a probabilidade de falha em termos de probabilidade

## 7. CONCLUSÕES

Utilizou-se o método de Hasofer-Lind para o cálculo a probabilidade de falha para várias cargas aplicadas a uma estrutura compósita. Para validar os resultados obtidos através desta metodologia, são utilizados o método clássico e o método Bayesiano usando a simulação de Monte Carlo.

**Tabela 4** - Intervalos de credibilidade para a probabilidade de falha (Método de Monte Carlo-versão Bayesiana).

Carga [N]	Distribuição <i>a posteriori</i>	Probabilidade de falha (I.C. 95%)
964.704	<i>Beta</i> (2,10000)	(0.0000024, 0.0005570)
974.753	<i>Beta</i> (2,10000)	(0.0000024, 0.0005570)
984.802	<i>Beta</i> (6,9996)	(0.0002202, 0.0011663)
994.851	<i>Beta</i> (11,9991)	(0.0005492, 0.0018381)
1004.900	<i>Beta</i> (14,9989)	(0.0007655, 0.0022218)
1014.949	<i>Beta</i> (21,9981)	(0.0013003, 0.0030868)
1024.998	<i>Beta</i> (36,9966)	(0.0025224, 0.0048638)
1035.047	<i>Beta</i> (50,9952)	(0.0037129, 0.0064723)
1045.096	<i>Beta</i> (73,9929)	(0.0057257, 0.0090578)

O processo de validação é efetuado utilizando diagramas de dispersão e intervalos de confiança e de credibilidade. Mostrou-se que há concordância entre os métodos utilizados para estimar a probabilidade de falha das estruturas compósitas laminadas, pois no diagrama de dispersão os pontos ajustam-se à bissetriz dos quadrantes ímpares. Os intervalos de confiança e de credibilidade contêm o valor da probabilidade de falha obtido pelo método de Hasofer-Lind. Os intervalos obtidos pelo Método de Monte Carlo-versão clássica e versão Bayesiana são semelhantes devido a ter sido utilizada uma distribuição *a priori* não informativa. No entanto, uma vantagem da versão Bayesiana é quantificar

a probabilidade de falha em termos de probabilidade.

## AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem o apoio financeiro concedido pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia (FCT), Portugal, através do financiamento do “Laboratório Associado de Energia, Transportes e Aeronáutica (LAETA)”.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. Hasofer, N. Lind, Exact and Invariant Second-Moment Code Format. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 100, 1974, p. 111–121.

- [2] C.C. António, L.N. Hoffbauer, Uncertainty propagation in inverse reliability-based design of composite structures. *International Journal of Mechanics and Materials in Design* 6, 2010, pp. 89–102.
- [3] C.C. António, L.N. Hoffbauer, Optimal design of composite shells based on minimum weight and maximum feasibility robustness. *International Journal of Mechanics and Materials in Design* 13, 2017, pp. 287–310.
- [4] S.W., Tsai Composite Design. *Think Composites*, USA, 1987.
- [5] R.E. Melchers, Structural reliability analysis and prediction, 2<sup>nd</sup> Edition, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1999.
- [6] M. Lemaire, *Structural Reliability*, Wiley, 2009.
- [7] C. Paulino, M. Turkman, B. Murteira, *Estatística Bayesiana*, Fundação Calouste Gulbenkian, 1996.
- [8] F. Guérin, M. Barreau, A. Charki, A. Todoskoff, Bayesian estimation of failure probability in mechanical systems using Monte Carlo simulation. *Quality Technology Quantitative Management* 4, 2007, p. 51–70.
- [9] S. Ahmad, B.M. Irons, O.C. Zienkiewicz, Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2, 1970, pp. 419–451.
- [10] J.A. Figueiras, Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells. Ph.D. Thesis, University College of Swansea, UK, 1983.