

DESENVOLVIMENTO DE UM SISTEMA EXPERIMENTAL PARA A DETERMINAÇÃO DE FREQUÊNCIAS PRÓPRIAS DE VIBRAÇÃO

DEVELOPING OF AN EXPERIMENTAL SYSTEM IN ORDER TO OBTAIN NATURAL FREQUENCIES OF VIBRATION

M. Pérez^{1,3}, L. Roseiro¹, C. Alcobia¹, A. M. Amaro², M. A. Neto²



¹ Departamento de Engenharia Mecânica, Instituto Politécnico de Coimbra
misrra_sp@hotmail.com; roseiro@isec.pt; alcobia@isec.pt

² CEMUC, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Coimbra
ana.amaro@dem.uc.pt; augusta.neto@dem.uc.pt

³ Controlar – Electrónica e Sistemas, Lda; Centro Empresarial de Alfena

RESUMO

Nos dias de hoje a análise das frequências próprias de vibração tornou-se num aspeto a ter em consideração nas mais variadas indústrias. O estudo da resposta dinâmica, frequências de vibração, amortecimento e modos próprios, de estruturas complexas em função das condições de carregamento, é um problema de difícil resolução recorrendo apenas a ferramentas numéricas ou analíticas. Este trabalho consistiu no desenvolvimento de um software baseado no programa LabVIEW, para a determinação das frequências próprias de qualquer sistema mecânico. Para a validação do software foi analisada uma viga encastrada-livre. Os resultados obtidos experimentalmente foram comparados com os numéricos determinados com recurso ao ADINA.

ABSTRACT

Nowadays the analysis of the Eigen frequencies of vibration has become one aspect to be considered in various industries. The study of the dynamic response, frequency of vibration and damping Eigen modes of complex structures depending on the loading conditions, it is difficult to solve using only numerical or analytical tools. This work presents software developed, MT Tremula, based in the LabVIEW, to obtain the natural frequencies for any mechanical system. In order to validate the developed Software a clamped-free beam was analyzed. The results experimentally obtained were compared with the numerical ones achieved using the ADINA finite element program.

1. INTRODUÇÃO

Alguns dos problemas frequentes que surgem em estruturas mecânicas são originados pelo comportamento dinâmico que as mesmas apresentam, como por exemplo quando são quando expostas a

ruído e a vibrações. A partir dos anos 30's, devido ao interesse em compreender de forma eficaz o desempenho dinâmico de diversos componentes mecânicos, observou-se um crescente aumento no estudo da resposta dinâmica das estruturas. As teorias clássicas de análise de corpo rígido eram

inadequadas para o estudo de problemas dinâmicos. Da mesma forma, as teorias baseadas em métodos de análise elástica, as quais obrigam ao uso da resolução de um conjunto de equações diferenciais, não eram eficazes na análise de problemas dinâmicos (Ramsey, 1993). Durante os anos 60's verificou-se o desenvolvimento do algoritmo da transformada de Fourier (FFT), em que os sinais obtidos no tempo podiam ser processados de forma mais rápida através da conversão para o domínio da frequência. A invenção da FFT por JW Cooley e J.W. Tukey, em 1965, veio revolucionar as técnicas experimentais usadas na dinâmica estrutural.

A análise modal é um processo que permite descrever qualquer estrutura em função das suas características naturais, tais como: frequência, amortecimento e modos de vibração (propriedades dinâmicas). Os modos de vibração são inerentes à estrutura. De acordo com Schwarz and Richardson (Schwarz, 1999) cada modo é definido a partir da frequência natural (ou ressonância modal), modo de amortecimento e modo de vibração. Se as propriedades, ou as condições de fronteira, dos materiais em estudo forem alteradas os modos também o são. Segundo Avitable (Avitable), o conhecimento dos modos de vibração e a forma de como a estrutura vibra quando excitada ajuda o projetista a melhorar o produto final obtido. A análise modal é cada vez mais utilizada no projeto dos mais variados componentes nas indústrias automóvel, aeronáutica, informática, de equipamentos desportivos, entre outras.

Com o objetivo de se determinar uma representação fiável da dinâmica de um sistema recorre-se, normalmente, a análise experimental. O componente é sujeito a excitação dinâmica sendo a sua resposta analisada. Desta forma é possível obter uma imagem realista do comportamento dinâmico do sistema em estudo. Esta área da dinâmica estrutural é conhecida como Análise Modal Experimental (AME). A AME tem sido cada vez mais utilizada pelos investigadores na área da engenharia, por exemplo, como forma de conseguirem determinar parâmetros modais, tais como as

frequências próprias de vibração, modos próprios de vibração e coeficiente de amortecimento (Jassim, 2013). Desde o desenvolvimento da FFT que a análise modal foi sendo cada vez mais utilizada nos mais variados ramos de investigação, tais como acoplamento de subestrutura, deteção de danos e vibro-acústica (Maia, 2001). A função de resposta em frequência (FRF) é uma medida fundamental para separar as propriedades dinâmicas inerentes à estrutura das suas propriedades mecânicas. Os parâmetros modais são então determinados a partir das medições das FRF's. No presente trabalho apresenta-se o Software TREMULA, desenvolvido na plataforma LABView, e que permite determinar as frequências próprias de sistemas mecânicos, através da aplicação dos conceitos da Análise Modal Experimental.

2. MECÂNICA DAS VIBRAÇÕES

Para o estudo do comportamento dinâmico das mais variadas estruturas é de extrema importância a análise das vibrações que podem surgir. Esta análise pode contribuir para um incremento na manutenção preventiva de máquinas, em estudos da resistência de materiais, entre outros. Por vibração entende-se qualquer movimento repetitivo num determinado intervalo de tempo. Assim, a teoria das vibrações analisa os movimentos oscilatórios dos corpos, bem como as forças a eles associadas. Para a análise do comportamento dinâmico de qualquer estrutura é necessário a identificação correta das características mecânicas da mesma, ou seja, dos seus parâmetros modais.

2.1. Parâmetros Modais

Apesar dos sistemas físicos reais serem considerados contínuos, isto é, com propriedades físicas bem distribuídas e o seu comportamento explicado através de equações diferenciais de derivadas parciais, é comum os mesmos serem descritos através de equações diferenciais ordinárias (EDO), isto é, equações que envolvem as derivadas de uma função desconhecida de uma só variável.

Para um sistema discretizado com 1 grau de liberdade (GDL), em que os parâmetros em estudo são a massa m [kg], a rigidez elástica k [kg s⁻²], o amortecimento c [kg.s⁻¹], a EDO que define a oscilação livre é:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi w_n \dot{x}(t) + w_n^2 x(t) = 0 \quad (1)$$

onde:

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (3)$$

sendo $x(t)$ a posição do sistema, $\ddot{x}(t)$ e $\dot{x}(t)$ a segunda derivada (aceleração) e a primeira derivada (velocidade) da função $x(t)$, w_n a frequência natural e ξ o fator de amortecimento. Para $\xi < 1$, verifica-se a oscilação do sistema e a solução da equação diferencial é dada pela equação (4):

$$x(t) = e^{-\xi w_n t} A \cos(w_d t - B) \quad (4)$$

sendo A e B constantes determinadas pelas condições iniciais. A resposta vem em função de uma componente exponencial ξ , e de outra componente oscilatória, frequência natural amortecida, w_d [rad s⁻¹] dada pela equação 5.

$$w_d = w_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (5)$$

A principal diferença entre os sistemas com 1 GDL e outros com maior número de GDL é o facto de para estes últimos a resposta ser obtida através da configuração do sistema a vibrar. Para um sistema com vários graus de liberdade o estado natural de vibração corresponde a uma determinada configuração de deslocamentos, designada por modo de vibração do sistema. Um sistema com vários graus de liberdade, tem tantos modos de vibração quanto o número de GDL. Cada modo de vibração fica definido pela forma espacial que apresenta, pela sua frequência natural e amortecimento. Estes parâmetros, conforme já referido, são designados por parâmetros modais e podem ser determinados através das propriedades do sistema (massa, rigidez, etc.) e pelas condições de fronteira. O movimento real do

sistema será dado pela combinação linear de todos os modos, dependendo do modo de excitação inicial e da influência relativa de cada modo no movimento global.

2.2. Função de Resposta em Frequência (FRF)

A FRF é uma medida fundamental que permite separar as propriedades dinâmicas inerentes ao sistema da estrutura mecânica. No caso de sistemas lineares as FRF's permitem o cálculo dos parâmetros modais experimentais através de métodos que ajustam os coeficientes de uma expressão teórica para a FRF, para que o modelo teórico consiga reproduzir com a maior exatidão possível os dados experimentais. De uma forma simplista a FRF descreve a relação entrada-saída de 2 pontos de uma estrutura como função da sua frequência (Schwarz, 1999). A Figura 1 ilustra o fluxo de análise modal.

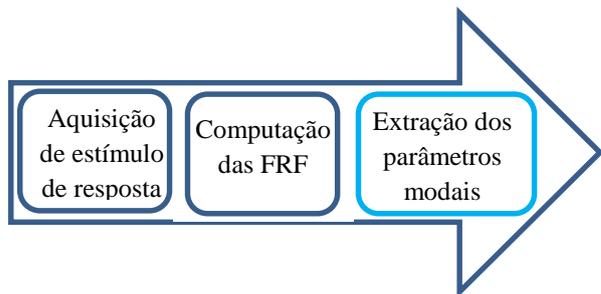


Fig 1 - Fluxo de análise modal experimental.

De acordo com Ferreira (Ferreira, 2014) um sistema linear submetido a um sinal de entrada sinusoidal de frequência ω , apresenta na sua saída um sinal também sinusoidal, de mesma frequência, porém de amplitude e fase diferentes. Em função da variável de resposta escolhida para o sistema podem ser obtidas várias FRF's. Se a variável de saída é a velocidade a FRF designa-se por Mobilidade, no caso de ser o deslocamento por Receptância, se for a aceleração a FRF denomina-se Acelerância ou Inertância. No presente trabalho optou-se pela aceleração como variável de saída. A acelerância ($H(\omega)$) pode ser interpretada fisicamente como sendo uma força de entrada sinusoidal com uma frequência ω a produzir uma aceleração de saída sinusoidal com a mesma frequência, mas com

amplitude multiplicada por um fator $|H(\omega)|$ estando as fases de entrada e saída desfasadas de um ângulo $\angle H(\omega)$. A aceleração é uma quantidade completa, isto é, apresenta magnitude e fase. Para o caso mais simples, com 1 GDL, as expressões de magnitude de aceleração ($|H(\omega)|$) e fase da aceleração ($\angle H(\omega)$) estão indicadas nas equações (6) e (7), respetivamente:

$$|H(\omega)| = \frac{\omega^2/m}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\xi\omega\omega_n)^2}} \quad (6)$$

$$\angle H(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) - \pi \quad (7)$$

onde m é a massa do sistema e ω_n a frequência natural não amortizada. No caso de um sistema com vários GDL a FRF é obtida pela sobreposição das respostas do sistema para cada um dos modos existentes.

3. SISTEMA DE ANÁLISE DESENVOLVIDO

Através do software desenvolvido, denominado MT Tremula, é possível a realização de todas as tarefas associadas à análise modal experimental: aquisição, determinação da função de resposta em frequência e dos parâmetros modais. Cada uma das tarefas indicadas é realizada de forma independente através de um módulo ao qual se acede a partir do menu principal. Toda a informação obtida em cada uma das etapas é armazenada, de forma coerente e ordenada, em ficheiros de dados com formato próprio da National Instruments (TDMS).

3.1. Aquisição de dados

Em análise modal experimental existem duas formas para a excitação da estrutura: o shaker, que é um excitador eletrodinâmico, e o martelo de impacto. No shaker o sinal que entra é convertido num campo magnético alternado que alimenta uma bobine, ligada à parte móvel

do aparelho e à estrutura. Para a utilização deste excitador é necessário garantir a ligação entre a plataforma sustentadora do excitador e a estrutura, pelo que normalmente se recorre a um transdutor de força. A frequência e a amplitude são controladas independentemente (White, 1971). O martelo de impacto é também um método utilizado na excitação de estruturas. Com o martelo de impacto são necessários maiores tempos na fase de análise, bem como no processo de medidas, sendo, no entanto, um modo bastante simples de excitar as estruturas. Ligado ao impactor do martelo existe uma célula de carga que avalia a magnitude de força sentida pelo impactor que é igual e oposta à aplicada à estrutura (White, 1971). Do ponto de vista teórico não existe diferença nas FRF's obtidas pelos 2 modos de excitação. Contudo, existem alguns fatores na aplicação que os distinguem. Os martelos de impacto interferem pouco com a estrutura, ao contrário do shaker que ao ser montado sobre a estrutura altera a sua massa e pode alterar a constante elástica. Também o fator económico deve ser tido em conta tomando o martelo de impacto mais competitivo. No presente estudo o software desenvolvido, MT Tremula, utiliza o martelo de impacto como excitador. Os modos de vibração só são passíveis de deteção caso o componente seja excitado com uma quantidade de energia suficiente para o modo de frequência. Assim, é fácil entender-se que é fundamental controlar a quantidade de energia transferida do martelo para a estrutura, bem como a sua distribuição em toda a gama de frequências.

3.2. Determinação da FRF

As FRF foram definidas como sendo a relação da transformada de Fourier (FFT) nos sinais de entrada e saída. Sendo a estrutura excitada por um sinal em função do tempo a passagem deste para o domínio da frequência é realizada pela FFT. Após a obtenção dos dados de entrada e de saída é possível a determinação das FRF's, por 3 formas distintas, consoante se queira minimizar o efeito do ruído de saída, H_1 ; de entrada, H_2 , ou de ambos, H_v . No presente estudo optou-se por minimizar o ruído de saída. Considere-se uma sequência de números reais $\{n\}$ por $\{FFT(n)\}$ entende-se a sequência

completa que permite a obtenção da transformada discreta de Fourier. Sendo $\{S\}$ e $\{R\}$ as sequências de estímulo e resposta para cada um dos N elementos, respetivamente, a FRF pode ser calculada pela equação 8:

$$H_1(\omega) = \frac{S_{SR}(\omega)}{S_{SS}(\omega)} \quad (8)$$

em que

$$\{S_{SR}(\omega)\} = \frac{\{FFT(R)\} \times \{FFT^*(S)\}}{N^2} \quad (9)$$

e

$$\{S_{SS}(\omega)\} = \frac{\{FFT(S)\} \times \{FFT^*(S)\}}{N^2} \quad (10)$$

$S_{SR}(\omega)$ é a função densidade espectral cruzada de $f(t)$ - intensidade da função no instante de tempo t , e $x(t)$ - sinal de resposta no instante t . $S_{SS}(\omega)$ é a função densidade espectral de potência, e descreve o conteúdo espectral do sinal original $f(t)$. A função $S_{SS}(\omega)$ é uma quantidade real, enquanto que $S_{SR}(\omega)$ é uma grandeza complexa. Em conjunto com a FRF é necessário a determinação da função de coerência, γ^2 , que é a função densidade espectral de potência. Esta função vai atuar como um indicador da qualidade da FRF obtida, quantificando a proporção de energia do sinal de resposta correlacionada com o sinal de excitação. A função de coerência é determinada de acordo com a equação (11):

$$\gamma^2 = \frac{|\bar{S}_{SR}(\omega)|^2}{\bar{S}_{SS}(\omega) \times \bar{S}_{RR}(\omega)} \quad (11)$$

em que $S_{RR}(\omega)$ representa a função densidade espectral do sinal de resposta. De acordo com Ewins (Ewins, 2000) o valor de coerência está compreendido entre 0 (quando não se verifica correlação entre o estímulo e a resposta) e 1 (a energia de resposta tem a sua origem a 100% do estímulo). Sendo γ^2 utilizada para aferir a qualidade da medição efetuada, facilmente se compreende que o valor desejado para a mesma se deve situar próximo

de 1. Para a obtenção dos valores médios das funções de densidade espectral, $\bar{S}_{SR}(\omega)$, $\bar{S}_{SS}(\omega)$ e $\bar{S}_{RR}(\omega)$, foram realizados neste trabalho 5 ensaios de estímulo e resposta. O software desenvolvido permite ao utilizador escolher qualquer número superior a 3.

3.3. Estimação dos parâmetros modais

No módulo “Extract Modal Parameters” o utilizador pode estimar as frequências naturais e o fator de amortecimento a partir da FRF determinada. No presente estudo foi utilizado o método de extração de parâmetros, Fração Polinomial Racional (RFP) de acordo com o apresentado por Richardson (Richardson, 1982). Para uma gama de frequências obtidas pelo utilizador, através dos cursores, é possível obter-se uma função polinomial que se ajusta à FRF. A partir desta função as frequências naturais e os fatores de amortecimento podem ser estimados. A função de ajuste vai variando dinamicamente de acordo com a gama de frequências e do número de modos escolhidos. Em qualquer altura do processo é possível guardar na MT File que está a ser usada, a função de ajuste com os dados das frequências e os fatores de amortecimento associados.

4. MATERIAL E PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Utilizando a análise modal e o software desenvolvido, MT Tremula, foram determinadas as frequências naturais dos 3 primeiros modos de vibração de uma viga encastrada – livre, com as dimensões ilustradas na Figura 2.

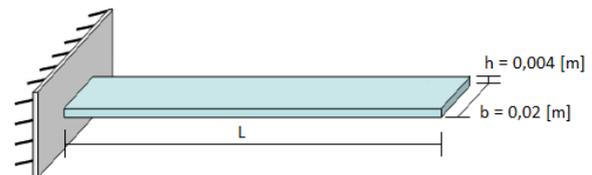


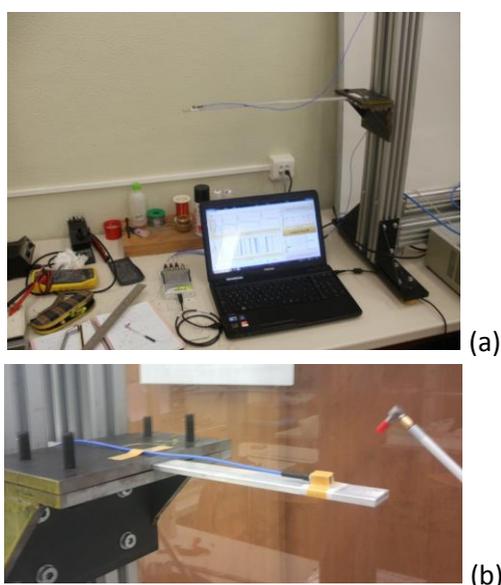
Fig 2 – Dimensões e condições de apoio da viga.

O comprimento L utilizado foi de 300 mm e de 450 mm, sendo o material constituinte da viga alumínio (Al) e aço, com propriedades indicadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades dos materiais.

	E [GPa]	ρ [kg/m ³]
Al	69	2700
Aço	205	7870

Para a realização dos ensaios experimentais, por recurso ao MT Tremula, utilizou-se a montagem experimental apresentada na Figura 3. Esta é constituída por um acelerómetro triaxial (ICP® Triaxial Accelerometer, Modelo 356^a01); um martelo de impacto (ICP® Impulse Force Test Hammer, Modelo 086D80) e um sistema de aquisição de dados (NI USB-9234). Nos ensaios a resposta é adquirida a 30 mm da extremidade livre.

**Fig 3** – (a) Montagem experimental; (b) Viga encastrada e martelo de impacto.

No total foram realizados 60 ensaios de estímulo-resposta correspondendo a 5 testes em cada ensaio com 3 ensaios em cada combinação variação de comprimento da viga – material. Uma vez obtidos os resultados é possível a determinação das FRF's correspondentes ao eixo z do acelerómetro (eixo perpendicular à viga), bem como as funções de coerência. Posteriormente determinam-se as frequências características, sendo que para cada combinação em estudo se realiza a média dos ensaios realizados. A interface com os resultados obtidos pelo software apresenta-se na Figura 4.

**Fig 4** – Resultados obtidos com o MT Tremula.

5 – ANÁLISE NUMÉRICA

A teoria de Euler-Bernoulli (E-B), simplificação da teoria linear da elasticidade, pode ser aplicada ao caso de vigas e permite avaliar o seu comportamento dinâmico. De acordo com E-B as frequências características de uma viga são determinadas pela equação (12) (Naguleswaran, 2002; Villalobos, 2009):

$$f_i = \frac{\beta_i^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \text{ [Hz]} \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$

em que E é o módulo de Young do material, ρ a massa volúmica do material, L o comprimento livre da viga, A a área da secção e I o momento de inércia da viga. β_i é um parâmetro que depende das condições de apoio (ver tabela 2).

No presente trabalho foram realizadas simulações numéricas com recurso ao método dos elementos finitos, usando o programa comercial ADINA. Recorreu-se a um elemento 3D Solid, com 4 nós por elemento tendo-se usado 120 elementos.

Tabela 2 - β_i no caso de uma viga encastrada -live

	β_i
$i = 1$	1,8751
$i = 2$	4,6936
$i = 3$	7,8543

6. RESULTADOS

Os resultados obtidos experimentalmente foram comparados com os resultados determinados numericamente por recurso ao ADINA e analiticamente de acordo com E-B.

Depois de obtidos os valores para as 3 primeiras frequências de vibração avaliou-se a variação entre os resultados experimentais e os numéricos (D), recorrendo à equação (13):

$$D[\%] = \left(\frac{f_N - f_E}{f_N} \right) * 100 \quad (13)$$

em que f_N representa a frequência determinada numericamente e f_E a frequência obtida experimentalmente.

Na figura 5 estão representadas as condições de fronteira e a malhagem utilizada e na figura 6 os resultados para a primeira frequência de vibração no caso do aço, variando o comprimento da viga. Nas tabelas 3, 4 e 5 estão resumidos todos os resultados obtidos. Para se aferir a influência do número de nós por elemento, realizaram-se novas simulações, para o caso de $L = 300$ mm, tanto para o aço como

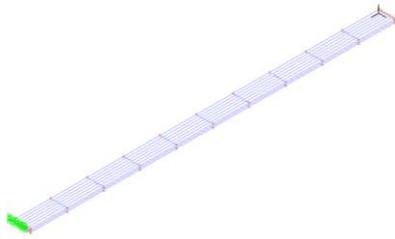
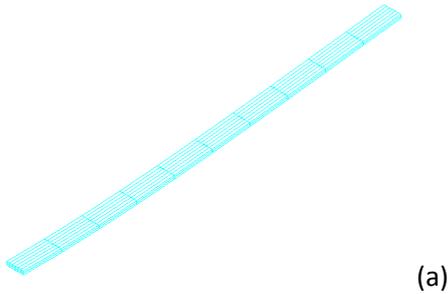


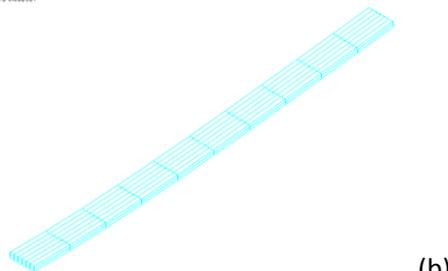
Fig 5 – Malhagem e condições de fronteira.

MODE: HAQ 0408570



(a)

MODE: HAQ 0402581



(b)

Fig 6 – 1º modo de vibração à flexão da viga em aço: (a) $L = 450$ mm; (b) $L = 300$ mm

para o alumínio, com o elemento 3DSolid de 27 nós por elemento, tendo-se utilizado 28800 elementos. Os resultados obtidos com este elemento são apresentados na tabela 6.

Por comparação entre os resultados obtidos a primeira constatação que se pode retirar é que não se justifica a simulação numérica com um elemento “mais pesado” visto que as diferenças observadas entre os resultados obtidos não são significativas.

Tabela 3 – 1ª frequência de vibração [Hz].

		L=300 mm	L=450 mm
Experimental		34,44	15,58
MEF (4 nós)	Al	36,29	16,13
E-B		36,30	16,13
Experimental		33,29	15,17
MEF (4 nós)	Aço	36,33	16,15
E-B [Hz]		36,64	16,29

Tabela 4 – 2ª frequência de vibração [Hz].

		L=300 mm	L=450 mm
Experimental		219,11	99,11
MEF (4 nós)	Al	227,40	101,54
E-B		227,44	101,08
Experimental		209,16	95,72
MEF (4 nós)	Aço	232,90	103,60
E-B [Hz]		229,59	102,04

Tabela 5 – 3ª frequência de vibração [Hz].

		L=300 mm	L=450 mm
Experimental		624,14	277,41
MEF (4 nós)	Al	636,70	282,82
E-B		636,90	283,07
Experimental		596,39	264,72
MEF (4 nós)	Aço	642,60	303,70
E-B [Hz]		642,91	285,74

Tabela 6 – Elemento 3D Solid com 27 nós.

Frequência [Hz]		L=300 mm
1ª		36,29
2ª	Al	227,27
3ª		635,65
1ª		36,64
2ª	Aço	229,45
3ª		641,78

De realçar também que os maiores valores determinados para D se observam no

caso do aço, mas nunca ultrapassando os 12%. No caso da viga em alumínio os valores de D nunca ultrapassam os 5%, o que para comparação entre valores numéricos e experimentais é claramente satisfatório. A maior diferença de valores detetada para o aço pode ser justificada pela imprecisão do valor do E e de ρ adotados, já que os mesmos não foram determinados neste estudo, mas sim estimados com base em valores da literatura. No caso do aço, o valor considerado apresenta uma gama de erro entre [9,19% - 6,22%], enquanto que no caso do Al esse erro se situa nos [5,21%-2,00%]. A E-B é muito utilizada na determinação de frequências próprias de vigas e veio confirmar os resultados numéricos, como era espectável.

7. CONCLUSÕES

Em função dos resultados apresentados é possível constatar-se que existe concordância entre as frequências obtidas numericamente e as determinadas experimentalmente recorrendo ao software MT Tremula. Assim, pode-se concluir que o MT Tremula se apresenta como uma ferramenta útil, rápida e fiável, na determinação das frequências próprias de vibração de componentes estruturais.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é apoiado por fundos FEDER através do programa COMPETE - Programa Operacional Factores de Competitividade - e por fundos nacionais através da FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia -, no âmbito do projeto de PEst-C/EME/UI0285/2013.

REFERÊNCIAS

Avitabile, P. "Experimental Modal Analysis – A Simple Non-Mathematical Presentation" Draft Document for Sound & Vibration Magazine, University of Massachusetts Lowell

Ewins, D.J. "Modal Testing: Theory, Practice and Application." 2000, Second Edition, Reserch Studies Press LTD.

Ferreira, C.C.T. "Análise Matemática de Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno no Domínio da Frequência via Transformada Discreta de Fourier." Revista INNOVER, 1, 2014: 77-84

Jassim, Z.A.; Ali, N.N.; Mustapha, F.; Abdul Jali, N.A. "A review on the Vibration Analysis for a Damage Occurrence of a Cantilever Beam." Engineering Failure Analysis, 31, 2013: 442-461

Maia, N.M.M.; Silva, J.M.M. "Modal Analysis Identification Techniques." Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 359, 2001:29-40

Naguleswaran, S. "Natural Frequencies, Sensitivity and Mode Shape Details of an Euler-Bernoulli Beam with One-Step Change in Cross-Section and with Ends on Classical Supports." Journal of Sound and Vibration, 252 (4), 2002: 751-767

Ramsey, K.A. "Experimental Modal Analysis, Structural Modifications and FEM Analysis on a Desktop Computer" Sound and Vibration, 1993: 1

Richardson, M. H., Formenti, D. L. "Parameter estimation from frequency response measurements using rational fraction polynomials." 1982, 1st IMAC Conference, Orlando, FL

Schwarz, B.J.; Richardson, M.H. "Experimental Modal Analysis", CSI Reliability Week, Orlando, FL, 1999

Villalobos, D.J.; Correa, J.C.J.; Pérez, A.M.; Zarate, J.E.; Gordillo, A.J.O.; Morales, J.R.N. "Modelado Matemático de una Viga en Voladizo por la Ecuación de Euler-Bernoulli." Memorias del XV Congreso Internacional Anual de la Somin, 23-25 Septiembre, 2009, Mexico

White, R.G., "Evaluation of the Dynamic Characteristics of Structures by Transient Testing", Journal of Sound and Vibration. 15(2), 1971: 147-161