

# VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DO NÍVEL DE PRECISÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE FIBRAS DE CONTACTO

## EXPERIMENTAL VERIFICATION OF THE CONTACT ELEMENT METHOD ACCURACY LEVEL

J. M. C. Estêvão<sup>1</sup>, A. Carreira<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Engenharia Civil, ISE, Universidade do Algarve



### RESUMO

*A obtenção de soluções analíticas de sistemas dinâmicos com distribuição contínua da massa apresenta uma elevada complexidade. Os problemas práticos envolvem, normalmente, um processo de discretização com maior ou menor número de graus de liberdade. Nestes problemas discretos, a massa do sistema dinâmico é concentrada num número finito de nós. Contudo, este processo de discretização origina soluções que correspondem somente a uma aproximação da solução exata, pois a massa está distribuída de uma forma contínua. O número mínimo de graus de liberdade a considerar na resolução deste tipo de problemas depende muito da sua natureza, e do método adotado para a análise da estrutura. O método dos elementos de fibras de contacto (MEFC) é um novo método de análise de estruturas, que pode ser usado na análise dinâmica de sistemas dinâmicos contínuos, pois recorre a micromodelos das estruturas. Para melhor entendermos a capacidade deste novo método nos resultados da análise dinâmica de uma estrutura, foi realizada uma comparação entre os valores obtidos via experimental e os obtidos pelo MEFC. Os resultados obtidos parecem indicar que este novo método pode conduzir a valores muito próximos dos obtidos por via experimental.*

### ABSTRACT

*The determination of analytical solutions of continuous dynamic systems presents a great complexity. Practical problems usually involve a discretization process with higher or lower number of degrees of freedom. In this discrete problems mass is concentrated in a different number of nodes. However, the discretization process implies solutions which are only an approximation of the exact ones, because mass is continuously distributed. The minimum number of degrees of freedom used in discrete problems is dependent on the nature of the problem and on the adopted structural analysis method. The fibre contact element method (CFEM) is a new structural analysis method which can be used for the analysis of continuous dynamic systems, because it uses micro-models. To better understand the capacity of the method in terms of the obtained results, a comparison between experimental and CFEM results was carried out. Obtained results seem to indicate that experimental and numerical results of this new method are very close.*

### 1. INTRODUÇÃO

A análise dinâmica de sistemas contínuos e altamente heterogéneos é um problema de elevada complexidade. O procedimento mate-

mático para resolução deste tipo de problemas consiste na resolução de equações diferenciais cujas condições de fronteira são muito difíceis de estabelecer para os problemas de carácter prático. Mesmo as formulações mais simples,

que se baseiam nas hipóteses de Euler-Bernoulli, só permitem resolver problemas muito simples. Assim, é usual o recurso a processos de discretização dos sistemas contínuos, cujas soluções são depois obtidas com recurso a métodos numéricos.

Existem muitas técnicas computacionais para resolução de problemas discretos com muitos graus de liberdade. Contudo, a precisão e o esforço computacional são muito dependentes do número de graus de liberdade considerados na análise.

Com o objetivo de tentar resolver o problema da resposta dinâmica de estruturas de betão armado com alvenarias de enchimento, foi proposto um novo método de análise de estruturas (Estêvão 2012), designado por método dos elementos de fibras de contacto (MEFC).

Tendo em vista a verificação da precisão deste novo método de análise de estruturas, neste trabalho é apresentado um estudo comparativo entre os resultados através da aplicação do MEFC, e os valores obtidos por via experimental.

## 2. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE FIBRAS DE CONTACTO

No MEFC, as estruturas são discretizadas em malhas de blocos retangulares. Estes blocos são divididos em pequenas fibras que se ligam a outras dos blocos vizinhos (Fig. 1), através de um ponto de contacto. Cada contacto entre blocos é composto por um conjunto de fibras, que resultam da subdivisão da dimensão do elemento de contacto. Os blocos não necessitam de apresentar dimensões idênticas, dado que o “elemento finito” corresponde ao contacto entre blocos, sendo os graus de liberdade do problema, as translações horizontal e vertical do centro do bloco, e a respetiva rotação. As fibras de contacto são consideradas inflexíveis, somente apresentando deformações normais e transversais, e são articuladas entre si no ponto de contacto. Estes pontos de contacto apresentam dois graus de liberdade por cada fibra: as translações horizontal e vertical do ponto. A rigidez de cada bloco é concentrada no elemento de contacto.

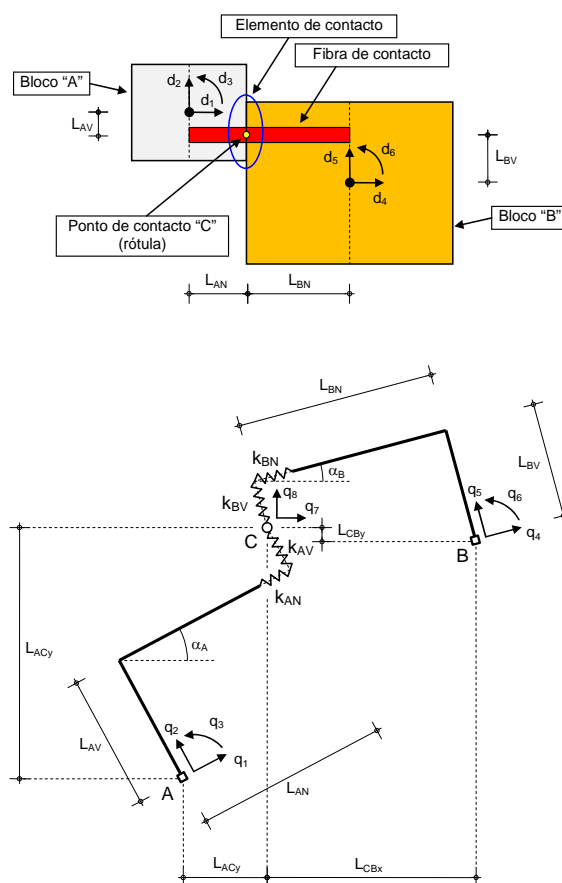


Fig. 1 – Tipo de discretização adotada no MEFC.

Comparativamente com o conhecido Método dos Elementos Finitos (MEF), com elementos retangulares de quatro nós e três graus de liberdade por nó, o método aqui desenvolvido apresenta um número muito inferior de graus de liberdade, o que origina matrizes de rigidez global muito mais pequenas e com menores dimensões das semibandas. Esse facto aumenta a eficácia computacional do método proposto. Além disso, o método desenvolvido garante o equilíbrio de forças entre faces dos blocos, o que não se verifica na tradicional formulação do MEF com elementos quadrangulares conformes, em que pode ser garantida a compatibilidade de deslocamentos (com elementos finitos conformes), mas apresentando tensões desiguais nas faces de dois elementos finitos contíguos.

A rigidez das molas do contacto ( $k_N$  e  $k_V$ ) correspondem à rigidez normal e transversal das fibras, e são iguais a

$$k_N = \frac{E_i \cdot A_i}{L_N} \quad (1)$$

$$k_V = \frac{G_i \cdot A_i}{L_N} \cdot \frac{5}{6} \quad (2)$$

Para facilitar a determinação da matriz de rigidez elementar, esta foi determinada, primeiramente, em relação ao sistema de coordenadas locais assinalado na Fig. 1, com oito graus de liberdade ( $q_1$  a  $q_8$ ). De modo a tornar os graus de liberdade  $q_7$  e  $q_8$  dependentes dos restantes, é proposta a realização da condensação estática da matriz de rigidez, adotando a seguinte partição da matriz de rigidez  $[k_q]$ :

$$[k_q] = \begin{bmatrix} [k_{qAB}] & [k_{qABC}] \\ [k_{qCAB}] & [k_{qCC}] \end{bmatrix} \quad (3)$$

sendo que a submatriz  $[k_{qAB}]$  está associada aos deslocamentos  $q_1$  a  $q_6$ , e a submatriz  $[k_{qCC}]$  está associada aos deslocamentos do ponto de contacto,  $q_7$  e  $q_8$  (Fig. 1).

Podemos determinar uma nova matriz de rigidez, tornando os deslocamentos do ponto de contacto dependentes dos deslocamentos dos blocos

$$[k_{qe}] = [k_{qAB}] - [k_{qABC}] \cdot [k_{qCC}]^{-1} \cdot [k_{qCAB}] \quad (4)$$

$$[k_{qe}] = \begin{bmatrix} [k_{AA}] & [k_{AB}] \\ [k_{BA}] & [k_{BB}] \end{bmatrix}$$

A matriz de rigidez associada às coordenadas globais ( $d_1$  to  $d_6$ ), poderá ser obtida a partir de

$$[k_d] = \begin{bmatrix} [k_{dAA}] & [k_{dAB}] \\ [k_{dBA}] & [k_{dBB}] \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[k_{dAA}] = [T_A]^T \cdot [k_{AA}] \cdot [T_A] \quad (6)$$

$$[k_{dAB}] = [T_A]^T \cdot [k_{AB}] \cdot [T_B] \quad (7)$$

$$[k_{dBA}] = [T_B]^T \cdot [k_{BA}] \cdot [T_A] \quad (8)$$

$$[k_{dBB}] = [T_B]^T \cdot [k_{BB}] \cdot [T_B] \quad (9)$$

em que  $[T_A]$  e  $[T_B]$  são matrizes de transformação de coordenadas, dadas por

$$[T_A] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_A & \sin \alpha_A & 0 \\ -\sin \alpha_A & \cos \alpha_A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$[T_B] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_B & \sin \alpha_B & 0 \\ -\sin \alpha_B & \cos \alpha_B & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A matriz de rigidez de cada elemento de contacto entre blocos adjacentes resulta da soma da contribuição de todas as fibras de contacto ( $N_m$ )

$$[k_e] = \sum_{i=1}^{N_m} [k_d]_{(i)} \quad (12)$$

A matriz de massa de cada bloco será igual a

$$[m_e] = \rho \cdot b \cdot L_x \cdot L_y \cdot [m_u] \quad (13)$$

$$[m_u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}(L_x^2 + L_y^2) \end{bmatrix} \quad (14)$$

em que  $\rho$  é a massa específica do material,  $L_x$  e  $L_y$  são, respetivamente, as dimensões horizontal e vertical do bloco, sendo  $b$  a correspondente espessura.

As matrizes globais de rigidez e de massa resultam da assemblagem de todas as matrizes elementares.

Este novo método de análise (MEFC) foi implementado no programa informático FIBERBLOC2D (Estêvão 2012), cujas soluções foram comparadas com resultados experimentais.

### 3. ANÁLISE EXPERIMENTAL

#### 3.1. Ensaio realizados

Uma viga de betão armado simplesmente apoiada com secção transversal retangular (0.10 m por 0.12 m) e 2.30 m de comprimento foi ensaiada nos laboratórios do Departamento de Engenharia Civil (DEC-ISE) da Universidade do Algarve (UAlg), com as características apresentadas na Fig. 2.



Fig. 2 – Características da viga de betão armado ensaiada.

Com o objetivo de avaliar as características elásticas do material constituinte da viga, foram efetuados dois ensaios distintos. Um dos ensaios, para avaliação do módulo de elasticidade tangente, foi realizado num provete cilíndrico de betão com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura, utilizando-se para o efeito um sistema em malha fechada constituído por anéis fixos ao provete. O procedimento do ensaio adotado, constou no registo dos deslocamentos verificados no provete devidos à aplicação contínua de uma força de compressão.

O outro ensaio foi realizado na viga e consistiu no registo dos deslocamentos verticais da secção de meio vão da viga, devidos à aplicação, na mesma secção, de uma força contínua vertical.

Em ambos os ensaios, o atuador foi montado numa estrutura de reação constituída por perfis metálicos, com rigidez adequada para os níveis de carga aplicados no decurso dos ensaios, tendo sido a carga avaliada por um transdutor de força, disposto entre o atuador e o elemento ensaiado, e os deslocamentos registados, para cada incremento de carga, por meio de um transdutor linear de deslocamento e um sistema digital de aquisição de dados.

Com o objetivo de identificar as frequências naturais de vibração da viga, na gama de 10 Hz a 300 Hz, foram registadas as respostas do elemento a uma excitação provocada pelo impacto de um martelo, segundo a direção vertical. No total foram

realizados 9 ensaios, variando entre eles os pontos de aplicação da força e das respostas. Em cada ensaio, as vibrações verticais foram medidas simultaneamente em duas secções, com recurso a acelerómetros uniaxiais colocados na parte superior da viga e registadas por um sistema de aquisição e análise de dados em frequência com 2 canais.

Dos ensaios de vibração foram recolhidas séries temporais, correspondendo cada uma delas à média de 64 amostras independentes de 2048 pontos de amostragem e um período de amostragem de 2 s, cada. Foi considerada uma frequência de amostragem de 1024 Hz, o que, de acordo com os trabalhos de (Shannon 1949a; Shannon 1949b), equivale a uma frequência de *Nyquist* de 512 Hz e um afastamento entre frequências de 0.5 Hz. Foi aplicado um filtro passa baixo com uma frequência de corte de 400 Hz, com o objetivo de eliminar os erros devido aos sinais estarem discretizados e uma janela de dados do tipo *Hanning*, para atenuar os erros associados ao carácter finito das séries temporais.

Para a obtenção destes registos foi necessário recorrer a algumas noções de processamento digital e análise espectral, tendo sido consideradas como referência os trabalhos (Bendat e Piersol 1993; Bendat e Piersol 2010; Carvalhal et al. 1989; Mendes e Oliveira 2008).

A partir dos registos temporais foram estimadas as funções de densidade espectral de potência da resposta em aceleração, por recurso às transformadas de Fourier.

### 3.2. Resultados experimentais

Os ensaios realizados no provete cilíndrico, permitiram avaliar a densidade média do betão constituinte da viga em  $2357 \text{ kg/m}^3$  e o módulo de elasticidade tangente médio em  $E = 9507 \text{ MPa}$ . Do ensaio realizado na viga para avaliar as suas características elásticas, registou-se um deslocamento máximo de  $\delta_{max} = 1.865 \text{ mm}$  na secção de meio vão, para a aplicação de uma força de 1 kN na mesma secção.

Nos ensaios de vibração realizados, a ação aplicada pelo martelo não foi medida, sabendo-se apenas que tem as características espectrais de um ruído branco, pelo que foi necessário recorrer a um método de identificação modal estocástica baseado apenas nas respostas da estrutura, para obter as frequências próprias de vibração da viga. Para este efeito foi utilizado o método básico no domínio da frequência (BFD – Basic Frequency Domain), que se baseia no facto das funções de resposta em frequência tomarem valores extremos próximos das frequências naturais de vibração (Bendat e Piersol 1993; Bendat e Piersol 2010). Desta forma, as frequências são determinadas por observação dos picos do gráfico do espectro de potência médio normalizado (ANPSD – Averaged Normalized power spectral density) (Felber 1993).

Na Fig. 3 apresenta-se o ANPSD, na gama de frequências de 10 Hz a 300 Hz, resultado das respostas registadas nos 9 ensaios de vibração realizados.

Dos picos de amplitude apresentados no ANPSD, os que equivalem a modos de vibração da viga são os que estão próximos das frequências de 20.5 Hz, 77 Hz, 168 Hz e 289 Hz, correspondendo estas aos 4 primeiros modos de vibração da viga.

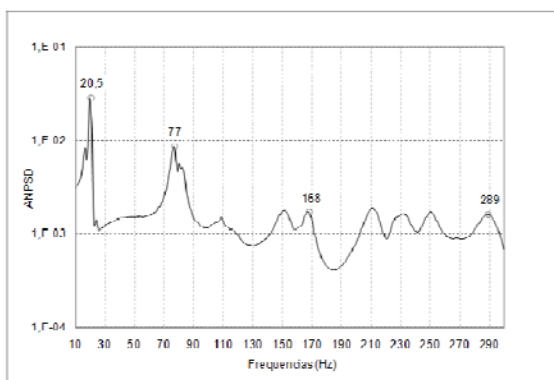


Fig. 3 – Função de densidade espectral de potência normalizada (ANPSD).

#### 4. RESULTADOS DO MEFC

Para verificação do nível de precisão do Método dos Elementos de Fibras de Contacto em reproduzir a resposta estática e

dinâmica da viga previamente ensaiada, foi adotado o modelo apresentado na Fig. 4, com as dimensões da viga indicadas anteriormente, e usando um valor para o módulo de elasticidade igual ao obtido experimentalmente ( $E = 9507$  MPa). O valor usado para a massa também foi o valor determinado em laboratório, referido anteriormente. A única calibração do modelo realizada neste trabalho, esteve associada com a colocação de molas horizontais nos apoios, de forma a tentar reproduzir o efeito do atrito existente entre a viga e o apoio.

O modelo inclui dois blocos metálicos nos apoios e 648 blocos ( $6 \times 108$ ) na viga de betão (1950 graus de liberdade no total, três por cada bloco). Cada bloco foi dividido em 50 fibras na zona dos elementos de contacto. Isto significa que, para cada bloco em contacto com um outro vizinho, foram usados 106 graus de liberdade (3 em cada centro do bloco e 100 nos pontos de contacto) para criar a matriz  $[k_q]$  de cada elemento de contacto (que resulta da soma das 50 matrizes  $[k_q]$  de cada fibra de contacto), mas só 6 destes graus de liberdade foram associados à matriz de rigidez global, o que constituiu um grande ganho computacional. Os resultados foram obtidos com o programa informático FIBERBLOC2D.

Como foi anteriormente referido, para melhor capturar as condições de apoio, foi incluído no modelo uma mola horizontal de baixa flexibilidade em cada apoio, para reproduzir o atrito entre a viga de betão e as chapas metálicas. A rigidez desta mola (383 kN/m) foi adotada de modo a que a solução obtida com o programa FIBERBLOC2D fosse igual ao valor do deslocamento vertical obtido experimentalmente no ensaio estático. O modo de vibração de corpo rígido que daí advém não foi considerado nos resultados. Foi adotado um coeficiente de Poisson igual a 0.2.



Fig. 4 – Modelo adotado para verificação da precisão do MEFC.

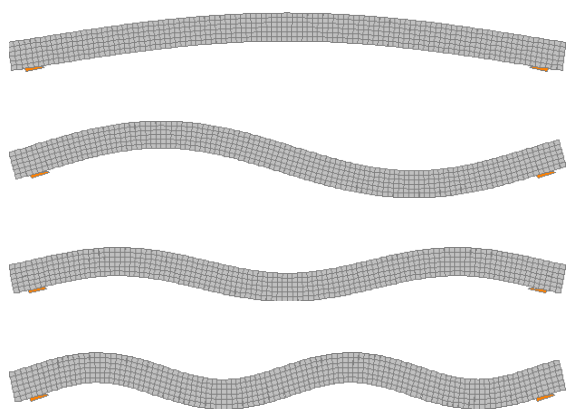


A comparação entre os resultados obtidos por via experimental, por via analítica (solução sem contabilizar a deformação por corte) e por via numérica, através do MEFC implementado no programa FIBERBLOC2D estão apresentados na Tabela 1.

**Tabela 1** – Resultados obtidos para o problema estático.

Método	$\delta_{max}$ (mm) para uma força de 1 kN
Ensaaios	1.865
Solução analítica	1.852 (-0.7%)
MEFC	1.865 (0%)

Os resultados obtidos com o MEFC para os primeiros 4 modos de vibração estão apresentados na Fig. 5.



**Fig. 5** – Configurações obtidas com o MEFC para os primeiros 4 modos de vibração.

Para comparação de resultados, também foi determinada a solução analítica de um problema dinâmico correspondente a uma viga simplesmente apoiada com distribuição contínua da massa, sendo que

$$f_i = \frac{\pi \cdot i^2}{2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{m \cdot L^4}} \quad (15)$$

$$\phi_{i(x)} = \text{sen} \left( \frac{\pi \cdot i \cdot x}{L} \right) \quad (16)$$

em que  $f_i$  (Hz) é a frequência natural de vibração do modo  $i$ , e  $\phi_{i(x)}$  é a função da correspondente configuração deformada. Os resultados comparativos estão apresentados no Tabela 2.

**Tabela 2** – Resultados obtidos para o problema dinâmico.

Método	$f_1$ (Hz)	$f_2$ (Hz)	$f_3$ (Hz)	$f_4$ (Hz)
Ensaaios	20.5	77	168	289
Solução analítica	20.66	83.63	185.92	330.53
	+0.8%	+7.3%	+10.7%	+14.4%
MEFC	20.59	79.86	172.36	291.03
	+0.4%	+3.7%	+2.6%	+0.7%

## 5. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Tendo em atenção as características da interface gráfica do programa FIBERBLOC2D, parece ser muito fácil criar os modelos estruturais de modo a reproduzir as condições que mais se aproximam à realidade.

A implementação do Método dos Elementos de Fibras de Contacto parece permitir tempos de resolução computacional relativamente baixos (inferiores a 1 segundo para o modelo adotado), tendo em conta a elevada discretização da estrutura (entre apoios a dimensão máxima das fibras dos blocos de betão foi de 0.46 mm).

Os resultados obtidos para a análise estática parecem demonstrar que o MEFC consegue reproduzir a resposta estática da estrutura ensaiada, desde que as condições de apoio sejam devidamente reproduzidas.

Em relação ao problema dinâmico, os resultados obtidos com o MEFC demonstram a capacidade do método em capturar os diversos modos de vibração identificados experimentalmente, e cujas configurações se enquadram nos resultados obtidos por via analítica, mas com melhor nível de aproximação aos valores experimentais. Isto poderá dever-se ao facto do modelo adotado para aplicação do MEFC, conseguir reproduzir melhor as condições de apoio da viga ensaiada experimentalmente. O nível de erro obtido com o programa FIBERBLOC2D foi relativamente baixo, quando comparados os resultados com os valores experimentais (entre +0.4% e 3.7%).

Atendendo à comparação dos resultados obtidos neste trabalho, parece ser possível

concluir que o MEFC é um método que permite obter soluções com elevado rigor em sistemas dinâmicos com massa distribuída de forma contínua

## **REFERÊNCIAS**

- Bendat, J.S., Piersol, A.G. 1993. Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis, John Wiley & Sons,
- Bendat, J.S., Piersol, A.G. 2010. Random Data: Analysis and Measurement Procedures, John Wiley & Sons, Inc., p 613.
- Carvalho, F.J., Costa, C.D.O., Azevedo, F.S. 1989. Elementos de Sistemas e de Análise e Processamento de Sinais - Curso, Em: Laboratório Nacional de Engenharia Civil,
- Estêvão, J.M.C. 2012. Efeitos da ação sísmica no comportamento de edifícios de betão armado com alvenarias de enchimento, 452 p., Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, UTL.
- Felber, A.J. 1993. Development of a Hybrid Bridge Evaluation System, 277 p., PhD Thesis, University of British Columbia.
- Mendes, P., Oliveira, S. 2008. Análise dinâmica de estruturas. Utilização integrada de modelos de identificação modal e modelos de elementos finitos, Laboratório Nacional de Engenharia Civil,
- Shannon, C.E. 1949a. Communication in the Presence of Noise, Proceedings of the IRE, 37(1), p. 10-21.
- Shannon, C.E. 1949b. Communication Theory of Secrecy Systems\*, Bell System Technical Journal, 28(4), p. 656-715.