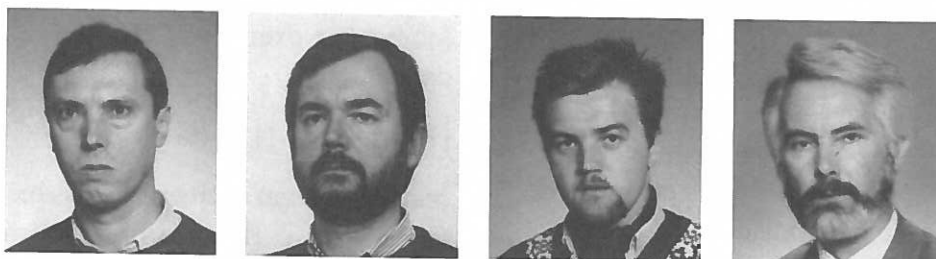


PROPAGAÇÃO DE ONDAS DE TENSÃO AXISSIMÉTRICAS EM ESTRUTURAS TIPO CASCA

Melo, F. J. M. Q.¹; Cirne, J. M. O. S.²; Leal, J. L.¹; Gomes, J. F. S.¹

¹Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial;
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - Portugal

²Departamento de Engenharia Mecânica;
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra - Portugal



RESUMO

Descreve-se uma análise numérica e experimental do problema da propagação de ondas axissimétricas em cascas de revolução em regime linear elástico. O estudo encontra aplicações em projectos envolvendo solicitações impulsivas, como é o caso de camisas de cilindros de motores de combustão interna, propulsores de mísseis e reservatórios de pressão sob solicitação transitória de alta velocidade.

INTRODUÇÃO

Uma acção impulsiva actuando sobre determinada zona de uma estrutura põe em movimento as partículas que a constituem. Se a acção variar rapidamente com o tempo, as partículas ficarão sujeitas a consideráveis acelerações, responsáveis pela geração de forças de inércia que se vão sobrepor às forças externas.

É objectivo do presente estudo a caracterização do fenómeno da propagação de ondas de tensão axissimétricas em estruturas de revolução utilizando o método dos elementos finitos.

Considerando um elemento finito axissimétrico como o representado na fig. 1, há a considerar um campo de deslocamentos projectável no referencial $\{x, z\}$, interpolado a partir de dois nós-seccão extremos (Oñate, 1992).

MATRIZES DE RIGIDEZ E DE MASSA

O estado dinâmico de um elemento axissimétrico como o que está em discussão depende das suas características elásticas e inerciais. Sob a forma matricial estas características podem ser representadas pela equação (Bathe and Wilson, 1976):

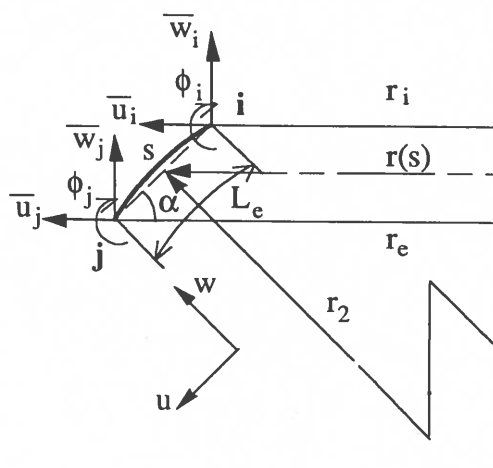


Fig. 1 - Elemento axissimétrico tipo casca.

$$[M]\ddot{\mathbf{u}} + [C]\dot{\mathbf{u}} + [K]\mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

onde [M], [C] e [K] são, respectivamente, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez; por sua vez, $\mathbf{u}(t)$, $\dot{\mathbf{u}}(t)$ e $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ são, respectivamente, os vectores deslocamento, velocidade e aceleração nodais e $\mathbf{F}(t)$ é o vector das forças nodais actuando no elemento.

Neste trabalho foi adoptado um elemento axissimétrico em que o modelo de deformação segue a hipótese de Reissner-Mindlin. Desta forma, o campo de deslocamentos é interpolado entre as duas secções nodais i e j considerando que a rotação ϕ da normal à superfície segundo a direcção meridional, é definida de modo independente dos deslocamentos \bar{u} e \bar{w} .

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \phi_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{w}_j \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad (2)$$

onde

$$N_i = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad ; \quad N_j = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

com $\xi = (-1, \dots, 1)$

A transformação dos deslocamentos, referidos ao sistema de coordenadas globais $\{\bar{u}, \bar{w}, \phi\}$, para os referenciais locais dos elementos da casca é obtida através da seguinte equação de transferência de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (3)$$

em que α é o ângulo definido na fig 1.

Nos problemas de análise de propagação de efeitos mecânicos transitórios em regime de alta velocidade é habitual desprezar o amortecimento [C] na equação (1) por

produzir apenas a variação da amplitude das ondas e não interferir na sua velocidade de propagação. Desta forma a solução numérica fica mais acessível como se verá mais adiante. A determinação da matriz de rigidez [K] do problema é obtida seguindo procedimentos habituais descritos em manuais sobre técnicas de elementos finitos (como por exemplo, Oñate 1992), através da equação:

$$[K] = \int_{\text{vol}} \{\boldsymbol{\varepsilon}^T\} [D] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dv \quad (4)$$

onde, para um elemento axissimétrico tipo casca, $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ e [D] são, respectivamente, o vector das deformações e a matriz de elasticidade (Oñate, (1992)) tendo as seguintes expressões matriciais:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{u \cos\alpha}{r} - \frac{w \sin\alpha}{r} \\ \frac{d\phi}{ds} \\ \frac{\cos\alpha}{r} \\ \frac{dw}{ds} - \phi \end{Bmatrix}$$

$$[D] = \frac{E h}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{\nu h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu h^2}{12} & \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5(1-\nu)}{12} \end{bmatrix}$$

em que E é o módulo de Young do material suposto isotrópico, ν é o coeficiente de Poisson e h é a espessura da casca considerada constante.

A integração em (4) deve ser *reduzida* (1 ponto de Gauss) para os termos envolvendo a rigidez de corte transversal, tal como descreve Hughes (1977). Os restantes termos devem utilizar 2 ou mais pontos de integração.

A matriz de massa para o elemento em discussão pode ser consistente, ou definida

$$[\hat{K}] = [K] + 0,25\Delta t^2 [M]$$

e

$$\hat{F}_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + [M](0,25\Delta t^2 \mathbf{u}_t + 0,25\Delta t^2 \dot{\mathbf{u}}_t + \ddot{\mathbf{u}}_t)$$

sendo $F_{t+\Delta t}$ o vector das forças externas no instante $t+\Delta t$. Pela eq. (4) iteramos o deslocamento \mathbf{u}_t e obtemos as velocidades $\dot{\mathbf{u}}_t$ e as acelerações $\ddot{\mathbf{u}}_t$ no instante $t+\Delta t$ a partir de valores em t . Este processo amplifica os erros no cálculo de $\dot{\mathbf{u}}_t$ e $\ddot{\mathbf{u}}_t$ se $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ já fôr pouco exacto devido a intervalos Δt excessivamente grandes. Os autores testaram neste trabalho uma versão alternativa à regra dos trapézios cuja equação para $t+\Delta t$ é dada por:

$$[K]\mathbf{u}_{t+\Delta t} + [M]\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \hat{F}_{t+\Delta t}$$

onde

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + 0,5\Delta t (\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \dot{\mathbf{u}}_t)$$

e

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + 0,5\Delta t (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_t)$$

ou ainda

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + 0,25 \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_t)$$

Fazendo convenientes substituições, obtemos a equação iterativa em $t+\Delta t$ a partir de valores em t :

$$(0,25 \Delta t^2 [M] + [K]) \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = -[K](\mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + 0,25 \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_t) + F_{t+\Delta t}$$

Neste processo inverso é possível vigiar melhor as eventuais oscilações da aceleração, pelo que a velocidade e o deslocamento aparecem previsivelmente melhorados. A matriz de massa tanto pode ser diagonal como consistente, quando um considerável número de elementos está envolvido.

VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

Como forma de validar os resultados obtidos com as soluções numéricas propostas, recorreu-se ao ensaio experimental de uma casca de revolução, constituída pela associação de uma casca cilíndrica com um fundo torisférico e de

uma placa circular, dado que esta é, no limite, uma casca de revolução. Em ambos os casos os resultados foram obtidos recorrendo à extensometria eléctrica.

Placa Circular

A fig 2 representa, de uma forma esquemática, o conjunto experimental utilizado para ensaiar a placa circular a que se recorreu, construída a partir de uma chapa em aço St37 e com dimensões de 550 mm de diâmetro e 3 mm de espessura. Esta placa foi suspensa por fios de pequena secção de modo a que fosse simulada a situação de corpo livre e foi solicitada no seu centro pelo impacto de uma esfera, com 15 mm de diâmetro, funcionando como pêndulo de forma a tornar possível o controlo da sua velocidade. O impacto ocorria na direcção perpendicular ao plano da placa, de modo que as ondas de tensão nela produzidas fossem de flexão, tendo o efeito destas sido registado com o auxílio de extensómetros, marca Micromasurements, refª EA-06-125AD-120, colocados respectivamente a 50, 130 e 230 mm de distância do centro e segundo a direcção radial.

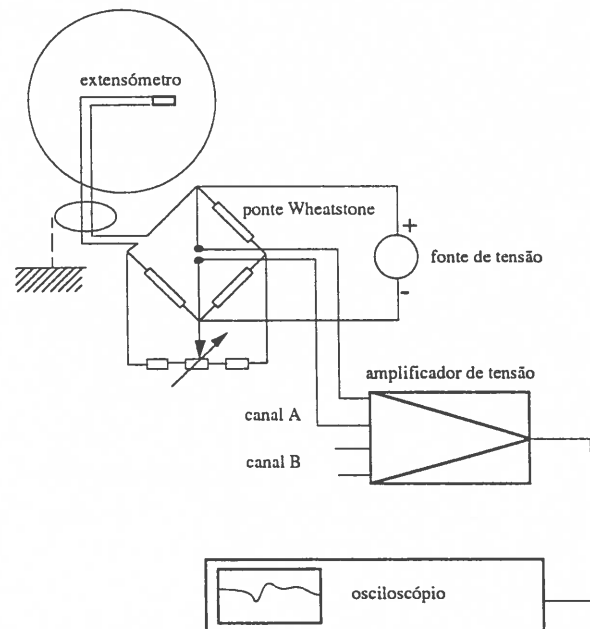


Fig. 2 - Esquema da montagem experimental para o estudo de ondas radiais numa placa circular.

Cada um dos extensómetros foi ligado a um dos braços de uma ponte de Wheatstone, inicialmente equilibrada com o auxílio de um

potenciômetro e duas resistências suplementares visíveis na fig 2, sendo o desequilíbrio dinâmico provocado pela passagem das ondas de tensão nas estações de leitura registado com o auxílio de um osciloscópio digital com memória da marca LECROY. Uma vez que o sinal obtido pelos extensómetros é neste tipo de testes de fraca intensidade, foi utilizado um amplificador instrumental, construído para efeito no Departamento de Engenharia Electrotécnica da FEUP, colocado entre as pontes de Wheatstone e o osciloscópio.

Os resultados obtidos com a montagem experimental foram comparados com os calculados nos mesmos pontos através das soluções numéricas apresentadas, representando a fig 3 a comparação desses valores num ponto colocado a 50 mm do ponto de impacto. Verifica-se pela análise das curvas desta figura que existe uma boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos, o que permite concluir que as soluções propostas são eficientes.

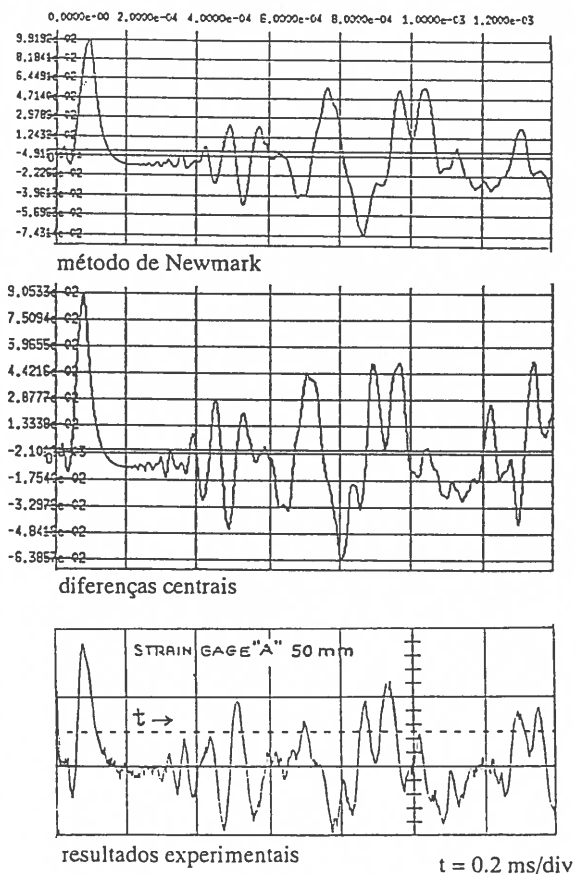


Fig. 3 - Comparação dos resultados numéricos e experimentais obtidos com a placa circular.

É de salientar no entanto que no método de Newmark se verifica uma dissipação das oscilações de alta frequência, para além de se registar um visível e progressivo desfasamento da deformação em relação ao resultado experimental.

Os resultados obtidos permitem ainda concluir que a velocidade de propagação das ondas de tensão produzidas é de cerca de 900 m/s, o que está de acordo com os resultados apresentados em literatura da espacialidade.

Casca de revolução

A casca de revolução utilizada na obtenção dos resultados experimentais tinha 4 mm de espessura e foi obtida a partir do corte radial de uma botija de gás, tendo ficado com as dimensões indicadas na fig. 4. Nesta figura está representado o esquema de montagem utilizado para o estudo da propagação da deformação meridional da casca devida ao choque produzido por uma esfera no centro da parte torisférica, em moldes em tudo idênticos aos usados com a placa. Neste ensaio recorreu-se ainda ao uso de um martelo instrumentado Bruel & Kjaer ligado a uma unidade registadora de força de modo a permitir visualizar a forma e a amplitude da solicitação.

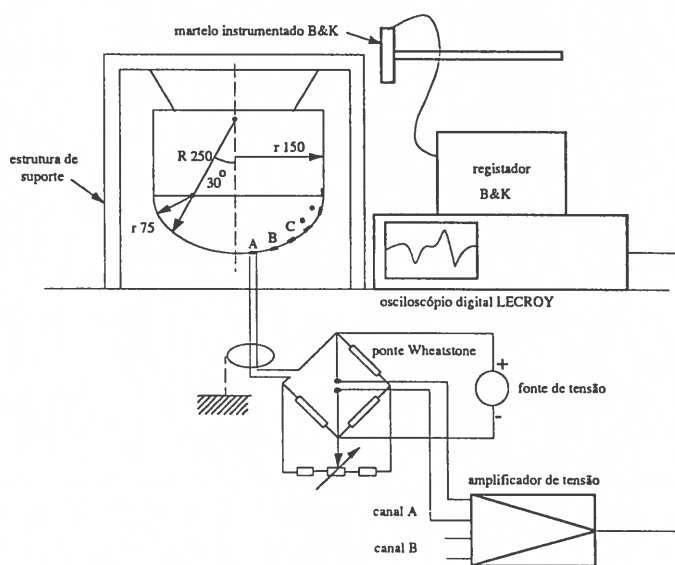


Fig. 4 - Montagem experimental utilizando o martelo instrumentado. Estudo da propagação de ondas numa casca torisférica.

Os resultados experimentais foram neste caso comparados com os obtidos com as soluções propostas e ainda com os obtidos com o módulo ADINA (1994), que utiliza o método de Wilson- θ .

Na fig. 5 é apresentada a deformação meridional resultante de dois testes experimentais, um com o martelo instrumentado e outro com a esfera, e os correspondentes valores obtidos com o método de Wilson- θ para uma esfera. Como se pode constatar pela análise destes gráficos, as ondas de tensão iniciais têm diferentes amplitudes, o que não é relevante para este trabalho que apenas pretendeu estudar o comportamento do corpo à propagação de ondas elásticas de tensão no domínio elástico. Verifica-se que nos ensaios com a esfera os resultados obtidos têm uma boa concordância, o que não acontece com a curva obtida com o martelo. Tal facto ficar-se-á a dever ao maior comprimento do impulso produzido pelo martelo que originará uma sobreposição das ondas incidentes e reflectidas.

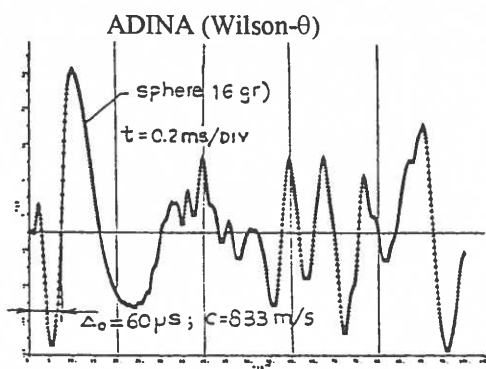
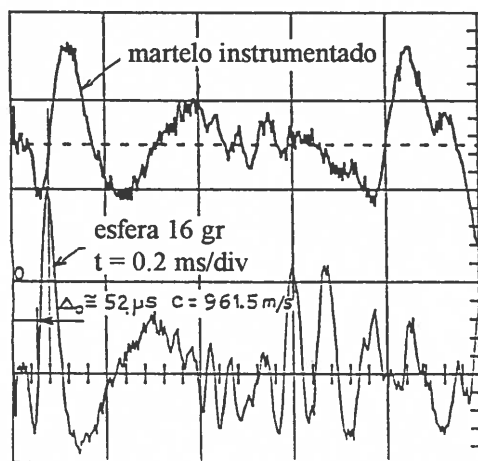


Fig. 5 - Comparação dos resultados numéricos e experimentais obtidos com a casca torisférica.

CONCLUSÕES

Foi analisado o problema da propagação de ondas axissimétricas de flexão em estruturas tipo casca de revolução. Da análise dos resultados obtidos por via numérica com os métodos das diferenças centrais e de Newmark com aceleração iterada, verificou-se um melhor desempenho do método das diferenças centrais quando comparado com os testes experimentais. O método de Newmark, além de praticamente suprimir as altas frequências, apresenta algum desfazamento que se vai acentuando com o tempo. Tem, no entanto, a vantagem de permitir maiores intervalos de iteração por ser incondicionalmente estável.

REFERÊNCIAS

- ADINA ARD 92-9 - Verification Manual (pp A55-7, A55-10).
- Bathe, K.J., Wilson, E.L.- "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice-Hall, 1976.
- Cook, R.; Malkus, D.; Plesha, M., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", 3rd Ed., New York, John Wiley & Sons, 1989.
- Hughes, T., "The Finite Element Method", Prentice-Hall, 1987.
- Oñate, E., "Cálculo de Estructuras por El Método de Los Elementos finitos. Análise Estática-Lieal", C.I.M.N.I., Universidade Técnica de Catalunha, Espanha, 1992.
- Reddy, J. N., "an Introduction to the Finite Element Method", McGraw-Hill, 1985.