

ANÁLISE DE TENSÕES EM CASCAS CILINDRICAS SOB A ACÇÃO DE FORÇAS LOCALIZADAS.

F. J. M. Q. de Melo, J. A. G. Chousal, J. L. Leal e J. F. S. Gomes

Laboratório de Óptica e Mecânica Experimental
Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



RESUMO

Neste trabalho é levada a cabo uma análise numérica e experimental do problema da deformação de cascas cilíndricas sob a acção de forças locais. Apresentam-se numa breve descrição as técnicas numérica e experimental utilizadas, tendo como objectivo vir a permitir uma análise híbrida para este problema, permitindo a partir de um procedimento experimental, caracterizar o campo de deslocamentos que depois leva à definição do campo de deformações e respectivas tensões. O procedimento experimental consiste no uso da holografia-TV, que possibilita resultados de grande precisão; depois, as relações diferenciais para as deformações em cascas cilíndricas serão utilizadas para o cálculo das deformações.

INTRODUÇÃO

O problema de forças radiais actuando em pequenas áreas de superfícies cilíndricas envolve um largo campo de situações comuns no projecto de reservatórios de pressão e partes de estruturas aeronáuticas e aeroespaciais onde se incluem geometrias de revolução, com incidência nas cascas cilíndricas. No projecto de reservatórios de pressão é necessário considerar o efeito da solicitação devida a ligações de tubos ou suportes, sob o efeito do esforço de dilatação ou outro tipo de cargas. No caso das estruturas aeronáuticas, acções igualmente complexas devem ser consideradas, tais como o esforço devido à acção de asas e estabilizadores.

A análise de deformações em cascas sob a acção de esforços localizados a levar a cabo por via numérica é laboriosa, quando soluções sob a forma de expressões analíticas são pretendidas. Uma via possível consiste na definição dos deslocamentos a partir de desenvolvimentos em séries trigonométricas para os deslocamentos da

casca em que um número finito de termos é adoptado, tendo como objectivo a obtenção de soluções aproximadas. As condições de carga podem exigir que o número de termos a adoptar nos desenvolvimentos seja relativamente elevado a fim de garantir resultados precisos.

Outra via possível consiste no uso de elementos finitos tipo casca, em que as mais recentes técnicas de geração da malha permitem soluções de grande fiabilidade e uma manipulação expedita. No entanto, também neste caso se deparam algumas dificuldades em modelar exactamente a geometria e as condições de carga ou fronteira, o que mais uma vez leva à necessidade de optar por simplificações e aproximações à estrutura real. Uma alternativa para resolver este problema consiste na adopção de técnicas híbridas, em que na estrutura real, submetida ao sistema de forças efectivo e dispendo de condições de fronteira realistas se procede a uma análise experimental com o objectivo de caracterizar o campo de deslocamentos. Uma técnica experimental possível, dispendo de grande precisão e

possibilitando uma análise de campo, consiste na holografia TV, a descrever a seguir. O campo de deslocamentos assim obtido, pode ser incluído num programa de elementos finitos, na fase ulterior do cálculo em que a solução do sistema de equações com vista à determinação dos deslocamentos se considera já resolvida. Este processo sugere úteis informações acerca do gradiente do campo de deslocamentos distribuídos na estrutura em estudo e possibilita o refinamento mais adequado nas malhas de elementos finitos com vista a caracterizar casos de concentração de tensões.

ANÁLISE NUMÉRICA DA DEFORMAÇÃO DE CASCAS CILINDRICAS

No presente trabalho foi desenvolvido um elemento tipo anel cilíndrico possibilitando a análise de deformações num cilindro sob a acção de forças radiais ou momentos flectores na direcção axial e concentrados sobre a superfície. Este método permite uma análise por via numérica completa ou serve os propósitos de uma técnica híbrida, tal como foi descrito.

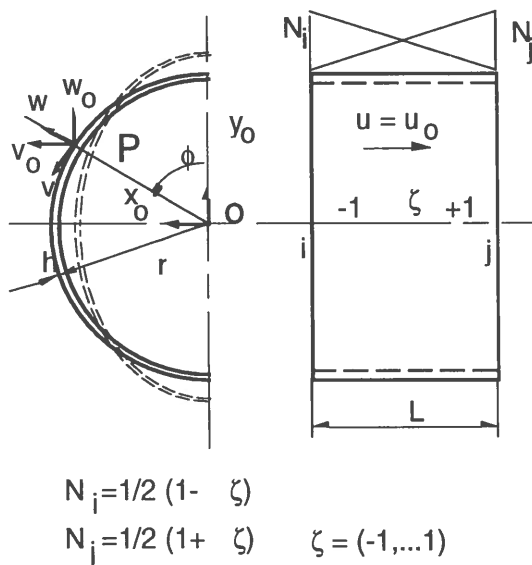


Figura 1 - Elemento de anel finito com o campo de deslocamentos definido num referencial global.

O elemento tipo anel finito usado na presente análise e mostrado na figura 1 é suposto possuir um modelo de deformação misto, em que na direcção axial, a casca segue as hipóteses de Reissner-Mindlin, enquanto que na

direcção circunferencial, o modelo de deformação é o de Kirchhoff-Love. No caso que se segue, a deformação da casca cilíndrica resulta da acção de forças radiais.

A opção do modo de deformação misto tem por objectivo combinar a simplicidade do modelo de Reissner-Mindlin (na direcção axial) com o facto de se considerarem desenvolvimentos trigonométricos na direcção circunferencial para os deslocamentos tipo casca. Estas funções trigonométricas são complementares entre si, o que aconselha a definir a rotação da normal à superfície a partir da curvatura meridional (que envolve funções derivadas dos deslocamentos).

Os deslocamentos tipo casca são definidos em relação a um referencial global, tal como mostra a figura 1. Isto tem o importante atributo de satisfazer a condições de equilíbrio no caso de um anel sob a acção de duas forças radiais e simétricas. Este resultado não é possível tendo definido os deslocamentos a partir de desenvolvimentos em série sobre um referencial curvo, muito embora os resultados para o deslocamento radial sejam correctos.

FORMULAÇÃO MATRICIAL DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS PARA O ELEMENTO DE ANEL

De acordo com a figura 1, para qualquer ponto P do cilindro, localizado pelo ângulo ao centro ϕ , é possível definir uma base de eixos locais de posição variável que permita a transformação de deslocamentos seguinte:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Para o caso de forças radiais, em cada secção i e j do elemento (figura 1), as incógnitas possíveis para o problema a combinar com funções de forma, são as seguintes:

-secção i:

$$\tilde{\delta}_{ei}^T = \{ w_i \ \phi_i \ \bar{b}_i^T \ \bar{d}_i^T \ \bar{a}_i^T \ \bar{\beta}_{xi} \} \quad (2)$$

-secção j:

$$\tilde{\delta}_{ej}^T = \{w_j \phi_j \bar{b}_j^T \bar{d}_j^T \bar{a}_j^T \bar{\beta}_{xj}^T\}$$

onde $w_{i(ou j)}$ é o deslocamento tipo viga para o anel cilíndrico (concentrado no centro da secção transversal); $\phi_{i(ou j)}$ é a rotação da secção transversal (devida a flexão tipo viga), admitindo que esta não distorce;

$\bar{b}_{i(ou j)}^T$ é o conjunto de termos de desenvolvimento em série caracterizando o empenamento da secção transversal;

$\bar{d}_{i(ou j)}^T$ é o conjunto de termos de desenvolvimento em série do deslocamento meridional;

$\bar{a}_{i(ou j)}^T$ conjunto de termos referente ao deslocamento em série para a ovalização da secção;

$\bar{\beta}_{i(ou j)}^T$ refere-se aos termos de desenvolvimento em série para a rotação de espessura na direcção axial e em toda a volta da secção.

Os deslocamentos u_o, v_o, w_o interpolam-se agora entre as secções i e j pelas expressões:

$$u_o = (r \cos \varphi \cdot \phi_i + \bar{C}_{\varphi 2}^T \bar{b}_i) N_i$$

e:

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & -r \cos \varphi N_i & N_i C_{\varphi 2}^T & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi N_i & 0 & 0 & N_i S_{\varphi}^T \cos \varphi & -N_i C_{\varphi}^T \sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi N_i & 0 & 0 & N_i S_{\varphi}^T \sin \varphi & N_i C_{\varphi}^T \cos \varphi & 0 \\ 0 & N_i \cos \varphi & 0 & 0 & 0 & N_i C_{\varphi 2}^T \end{bmatrix} \quad (j)$$

MATRIZ DE RIGIDEZ PARA UM ELEMENTO DE COMPORTAMENTO MISTO (MINDLIN E KIRCHHOFF)

Para as deformações, seguimos Kraus (1967) e Flügge (1973) tendo considerado a seguinte equação matricial

$$\tilde{\epsilon} = [L] \cdot \tilde{u} \quad (3)$$

$$+ (\dots \text{termos } j) N_j$$

$$v_o = (\bar{S}_{\varphi}^T \cdot \bar{b}_i) \cdot N_i + (\dots \text{termos } j) N_j$$

$$w_o = (w_j + \bar{C}_{\varphi}^T \cdot \bar{a}_j) N_j + (\dots \text{termos } j) N_j$$

$$\beta_x = (\phi_i \cos \varphi + \bar{C}_{\varphi 2}^T \bar{\beta}_{xi}) N_i + (\dots \text{termos } j) N_j \quad (2-a)$$

onde:

$$\bar{S}_{\varphi}^T = \{\sin \varphi, \sin 2\varphi, \sin 3\varphi, \dots\}$$

$$\bar{C}_{\varphi}^T = \{\cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \dots\}$$

$$\bar{C}_{\varphi 2}^T = \{\cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \dots\}$$

Sob a forma matricial, escreveremos:

$$\tilde{\delta} = [N] \tilde{\delta}_e \quad (2-b)$$

onde:

$$\tilde{\delta}^T = \{u, v, w\}$$

$$\tilde{\delta}_e^T = \{\tilde{\delta}_{ei}^T \tilde{\delta}_{ej}^T\} \quad (\text{ver equação (2)})$$

ou por extenso onde $\epsilon_x^0, \epsilon_{\varphi}^0, \gamma_{x\varphi}^0$ são deformações de membrana; por sua vez $k_x, k_{\theta}, k_{x\theta}$ e γ_{xz} são, respectivamente, a curvatura axial, circunferencial, torção da superfície e deformação de corte segundo espessura, tal como especifica a teoria de Reissner-Mindlin.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{x\varphi} \\ k_x \\ k_\theta \\ k_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\partial}{r \partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial x} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \end{Bmatrix} \quad (3-a)$$

A determinação da matriz de rigidez do elemento resulta da integração do produto matricial: (Zienkiewicz, (1981))

$$[K] = \int_0^{2\pi} ([L] \bar{u})^T \cdot [D] ([L] \bar{u}) r d\varphi dx \quad (4)$$

onde $[B] = [L] [N]$ (Zienkiewicz, (1981)) e $[D]$ é:

$$D = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & & & & & & & \\ \nu & 1 & & & & & & & & \\ & & \frac{1-\nu}{2} & & & & & & & \\ & & & \frac{h^2}{12} & \frac{\nu h^2}{12} & & & & & \\ & & & \frac{\nu h^2}{12} & \frac{h^2}{12} & & & & & \\ & & & & & \frac{h^2}{24} (1-\nu) & & & & \\ & & & & & & & & \frac{5}{6} \frac{1-\nu}{2} & \\ & & & & & & & & & \text{(zeros)} \end{bmatrix}$$

A equação de equilíbrio estático para o elemento tipo anel anteriormente descrito serve para solicitações radiais:

$$\bar{F} = [K] \cdot \bar{\delta}_e \quad (6)$$

onde $\bar{\delta}_e^T = \{\tilde{\delta}_{ei}^T; \tilde{\delta}_{ej}^T\}$, tal como são apresentadas em (2). O vector de forças \bar{F} é decomposto pelo programa de modo a se compatibilizar correctamente com os graus de liberdade que deve afectar. Por exemplo, considere que uma força radial F está concentrada na secção j do anel, na posição $\varphi = 0$ (topo do anel). Se houver n_φ termos séries, o vector 2º membro \bar{F} em (6) será:

$$\bar{F}^T = \left\{ \left(4 n_\varphi + 2 \right) \text{zeros em "i"}; \left(F; 0; \left\{ n_\varphi \text{zeros} \right\} \right); \left\{ n_\varphi \text{zeros} \right\}; \left\{ n_\varphi \text{forças } 2F \right\}; \left\{ n_\varphi \text{zeros} \right\} \right\} \quad (\text{eq.}(7))$$

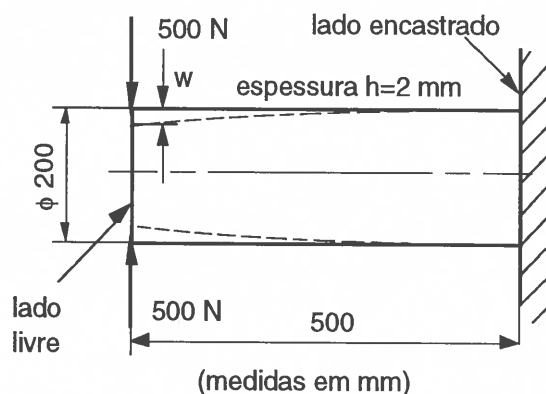
outros casos seriam estruturados sem dificuldade.

A precisão deste elemento finito é posta à prova no exemplo mostrado na figura 2, em que um cilindro é comprimido num extremo por um par de forças.

O número de termos trigonométricos considerado foi $n_\varphi = 12$ em todos os desenvolvimentos. O deslocamento radial máximo por ovalização no ponto de aplicação das forças é:

actual solução $w = 0.706\text{mm}$

($w = 0.781\text{mm}$ por ADINA 6.0 (1994))



Material: aço ao carbono
 $E=210 \text{ GPa}; \nu=0.3$

Figura 2 - Compressão radial de um cilindro por um par de forças.

Tratando-se de um caso de forças concentradas, o que representa um exemplo que conduz a algumas dificuldade numéricas em análises por elementos finitos tipo casca convencionais, os resultados obtidos apresentam-se em boa concordância com ADINA (1994).

O aumento do número de termos trigonométricos beneficia mais a precisão de resultado do que o aumento do número de anéis. Oñate (1992) utilizou 30 termos não nulos nos desenvolvimentos.

CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DO CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Procede-se nesta fase, à caracterização do campo de deslocamentos num cilindro utilizando uma montagem ESPI (Electronic Speckle Pattern Interferometry) (Vaz, 1994). Esta é uma técnica de campo, dispensa complexas preparações da peça a examinar e é extremamente precisa. A montagem típica apresenta-se na figura 3.

Os componentes legendados fazem parte da montagem estritamente necessária para um sistema de ESPI.

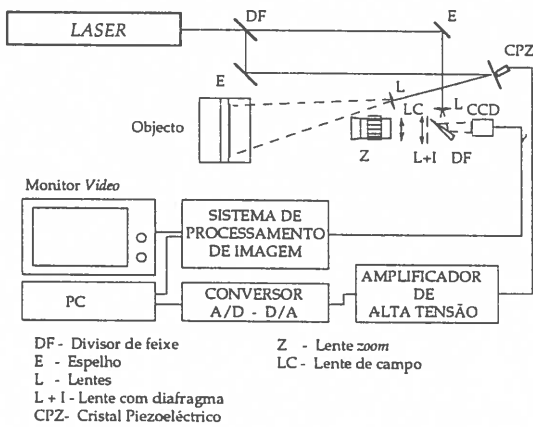


Figura 3 - Montagem - tipo para um sistema ESPI.

A figura 4 mostra o padrão de franjas característico para um cilindro sujeito a uma força concentrada a meio de uma geratriz. Na figura 5 está realizado o levantamento de forma da superfície, enquanto que na figura 6 são comparados gráficamente os resultados referentes aos deslocamentos sobre uma geratriz passando pelo ponto de aplicação da força tomando como referência a superfície cilíndrica não perturbada. Neste último caso uma boa concordância entre os resultados experimentais e os obtidos pelo elemento de anel é observada, o que sugere a possibilidade de, após o amaciamento do gráfico referente aos deslocamentos obtidos por ESPI (Reisch, 1967), ser possível obter as derivadas e curvaturas necessárias à caracterização da rotação da normal à superfície e consequente cálculo das tensões de flexão axiais, seguindo-se pois um esquema híbrido.

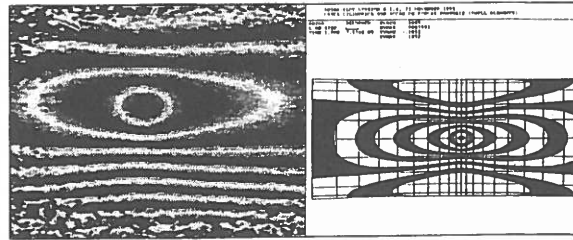


Figura 4 - Padrão de franjas obtidas por ESPI.

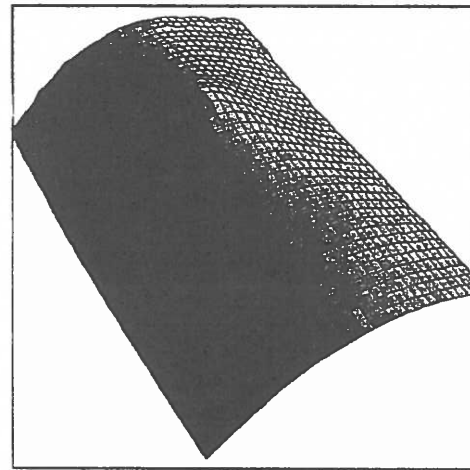


Figura 5 - Levantamento de forma da superfície a partir de padrão de franjas da figura anterior.

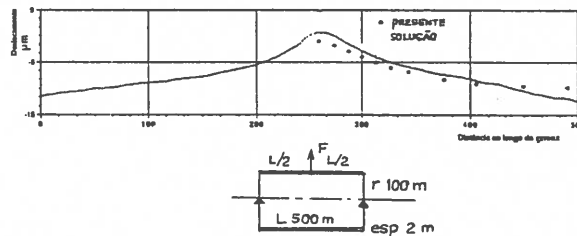


Figura 6 - Deformação radial do cilindro ao longo de uma geratriz passando no ponto de aplicação da força. Comparação dos resultados obtidos por ESPI e pela presente solução por elementos finitos.

CONCLUSÕES

Foi apresentado um procedimento híbrido para a análise de estruturas de forma contínua. O método, sendo extremamente preciso, possibilita resultados de grande fiabilidade. Pode operar pois com uma rotina de cálculo de deformações e respectivo campo de tensões simplismente tratando numericamente o campo de deslocamentos.

REFERÊNCIAS

- ADINA, Verification Manual (Linear Problems) (1994).
- Flügge, W., "Stresses in Shells", Springer, 1973.
- Kraus, H., "Thin Elastic Shells", John Wiley & Sons, 1967.
- Oñate, E., "Cálculo de Estruturas por el Método de Los Elementos Finitos" Análise Estático Lineal" C. I. M. N. I., Universidade Técnica de Catalunia, Espanha, 1992.

- Reisch, C., "Smoothing by Spline Functions", Num. Math. n° 10, pp 177-183, 1967.

- Vaz, M. A. P., "Interferometria LASER e Métodos Híbridos em Mecânica Experimental". Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Maio de 1995.

- Zienkiewicz, O. C., "The Finite Element Method", McGraw-Hill, 1981.

ABSTRACT

In this work a numerical and experimental analyses for the problem of radial actions on cylindrical shells are performed. The procedures for an hybrid analysis of the deformation/stress state are also summarized; in a first step, and optical technique having high sensivity (TV - holography) is used to assess the displacement field. Thenafter, these results will allow the calculation of the stress state by use of the constitutive relations, following an hierarquized routine.