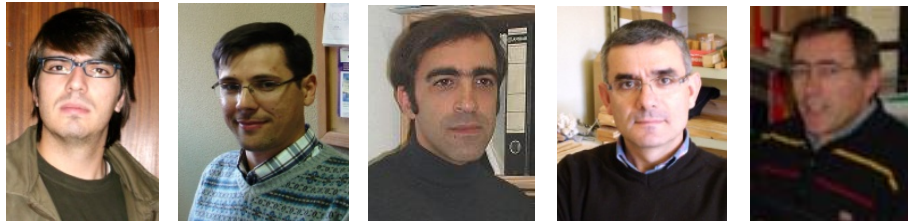


# MODELAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS DE MADEIRA REFORÇADAS COM LÂMINAS DE CARBONO

Pinto, J.M.T.<sup>1</sup>; Jesus, A.M.P.<sup>2</sup>; Pinto, J.T.Q.S.<sup>2</sup>; Morais, J.J.L.<sup>3</sup>; Lousada, J.L.P.C.<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Finalista Eng<sup>a</sup> Mecânica, <sup>2</sup>Prof. Auxiliar, <sup>3</sup>Prof. Associado c/ Agregação, <sup>4</sup>Investigador Auxiliar  
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro



## RESUMO

*O trabalho realizado teve por objectivo o desenvolvimento de modelos de elementos finitos de vigas de madeira reforçadas com lâminas de carbono, sujeitas à flexão em três pontos. Os modelos são calibrados através da comparação dos resultados numéricos com resultados experimentais obtidos pelos autores. Estes modelos são aplicados na estimativa das tensões na interface carbono/madeira, sendo os resultados numéricos comparados com três modelos analíticos. Esta comparação revela resultados consistentes entre as duas abordagens referidas. As propriedades dos materiais foram obtidas na literatura e aferidas através de alguns ensaios mecânicos realizados no âmbito deste trabalho.*

## 1- INTRODUÇÃO

O património arquitectónico português contém um importante número de estruturas de madeira, muitas das quais carecendo recuperação. Uma possibilidade consiste em substituir toda a estrutura, sendo este um processo caro. Em alternativa, estas estruturas podem ser reforçadas nas zonas mais debilitadas, sendo os laminados de carbono uma boa opção de reforço, dada a sua elevada razão resistência/peso.

A madeira de Pinho português apresenta, em geral, uma resistência mecânica mais baixa quando comparada com outras congéneres nórdicas dada a sua elevada densidade de defeitos. A aplicação de reforço neste tipo de vigas pode viabilizar a sua utilização para aplicações estruturais exigentes.

Muito trabalho de investigação tem sido efectuado no contexto do reforço de vigas de betão e vigas metálicas [Deng et al.

(2004), Abdelouahed (2006), Täljsten (1997)]. Nesses estudos, a extremidade do reforço tem sido considerada uma das zonas críticas porque o estado de tensão na interface laminado/viga, para além de ser bastante complexo, apresenta valores extremos nessa região.

Havendo pouco trabalho realizado sobre o reforço de vigas de madeira, os autores propõem o desenvolvimento de modelos de elementos finitos que permitam descrever o comportamento mecânico de vigas reforçadas com lâminas de carbono. Estes modelos são aferidos com um conjunto de resultados experimentais obtidos pelos autores, alguns dos quais já publicados [Pinto et al. (2006)].

Também se propõe uma validação por comparação com modelos analíticos publicados para vigas de betão reforçadas com FRP [Abdelouahed (2006)], vigas de

aço reforçadas com CFRP [Deng et al. (2004)] e vigas de betão reforçadas com placas de aço [Björn Täljsten (1997)]. Esta comparação é feita com base na análise de tensões na interface carbono/madeira, designadamente as tensões normais e de corte actuantes perpendicularmente ao plano do carbono,  $\sigma_{yy}$  e  $\tau_{xy}$ .

As propriedades dos materiais foram obtidas na literatura, tendo-se apenas realizado alguns ensaios para aferição de algumas destas propriedades.

## 2 – PROGRAMA EXPERIMENTAL

O programa experimental que serviu de base ao estudo consistiu em ensaios de aferição de algumas propriedades elásticas dos materiais, nomeadamente da madeira e do carbono. Também foram realizados ensaios de flexão em 3 pontos de vigas de madeira maciça e vigas reforçadas com lâminas de carbono.

### 2.1 – Propriedades dos materiais

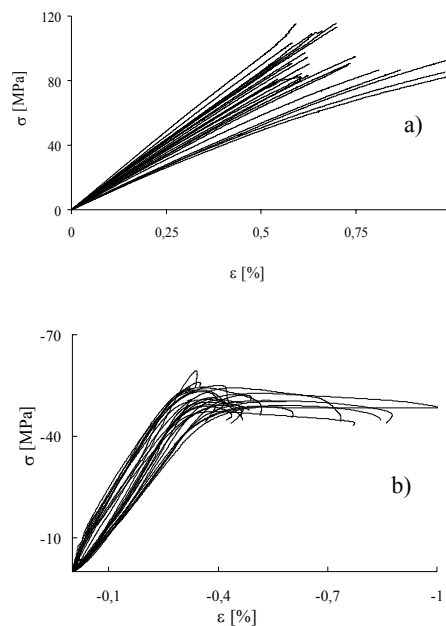
Os materiais considerados foram a madeira de pinho marítimo, espécie *Pinus Pinaster*, laminados de carbono e adesivo do tipo epóxico. A madeira foi considerada ortotrópica; os laminados de carbono, sendo compósitos unidireccionais, foram considerados transversalmente isotrópicos; o adesivo foi considerado isotrópico. Os materiais foram considerados elásticos. Para a madeira foram consideradas propriedades disponíveis na literatura [Pinto et al. (2006)]. Foram ainda realizados ensaios de tracção e compressão na direcção do fio da madeira tendo-se obtido valores de  $E_L=15\pm 3.28$  GPa e  $\nu_{LR}=0.46\pm 0.11$ , confirmando-se os valores publicados. Na figura 1 apresentam-se os registos de tensão deformação resultantes destes ensaios.

O reforço das vigas de madeira usado neste estudo consistiu em laminados de carbono com secção 1.2x50 mm da marca SikaCarbodur®. O módulo de elasticidade longitudinal do compósito foi determinado experimentalmente tendo resultado o valor  $E_C=160.73\pm 3.21$  GPa, sendo ligeiramente

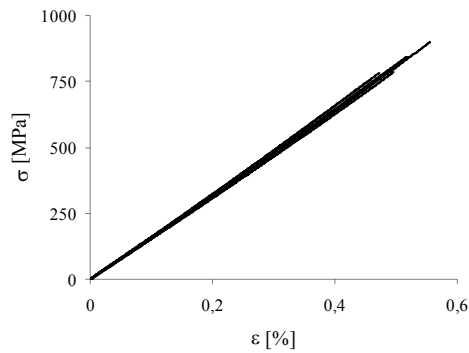
inferior ao valor sugerido pelo fabricante (165GPa). A figura 2 apresenta os registos tensão deformação obtidos nos ensaios de tracção dos laminados de carbono. As restantes propriedades elásticas do carbono e as propriedades do adesivo são as referenciadas por Pinto et al. (2006).

### 2.2 – Ensaio de flexão de vigas

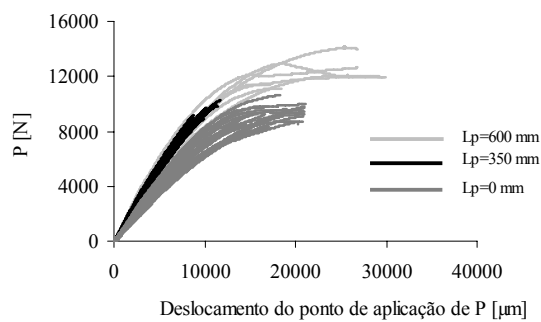
Foram testadas três séries de vigas em flexão em 3 pontos [Pinto et al. (2006)]. Uma série consistiu em vigas maciças sem reforço; as outras séries consistiram em vigas reforçadas com lâminas de carbono de 1.2 mm de espessura com comprimentos ( $L_p$ ) de 350 e 600 mm, respectivamente. A Figura 3 apresenta os registos carga-deslocamento a meio vão. Na Tabela 1 apresentam-se os valores médios da rigidez obtida experimentalmente para as vigas testadas com e sem reforço. Também se inclui o desvio padrão e o intervalo de confiança a 95%. Constata-se que a rigidez da viga aumenta com a aplicação do reforço. No entanto, a extensão do reforço tem uma influência reduzida na rigidez, pelo menos para os dois valores de  $L_p$  considerados, não sendo verdade para a carga de rotura, que aumenta com a extensão do reforço.



**Fig 1** – Registos tensão deformação na direcção longitudinal da madeira *Pinus Pinaster*: a) tracção; b) compressão.



**Fig 2** – Registos experimentais dos ensaios de tracção dos laminados de carbono.



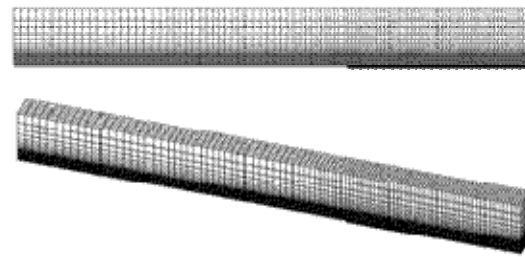
**Fig 3** – Registos experimentais força – deslocamento das vigas testadas.

**Tabela 1** – Valores médios de rigidez [N/mm].

	Viga sem Reforço	Viga com Reforço	
		L <sub>p</sub> =350 mm	L <sub>p</sub> =600 mm
Média	854.63	1129.75	1187.00
Desvio Padrão	97.18	79.09	98.71
Intervalo de Confiança	43.70	54.80	68.40

### 3 – SIMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Neste trabalho foram construídos modelos de elementos finitos das várias vigas testadas, usando o código comercial ANSYS®. Foram tidos em consideração vários modelos bidimensionais e tridimensionais, modelos com e sem reforço e ainda com e sem contacto variando, nos modelos reforçados, o comprimento do reforço (L<sub>p</sub>=350mm e L<sub>p</sub>=600mm). A Figura 4 ilustra malhas 2D e 3D.



**Fig 4** - Exemplo de malhas de elementos finitos usadas no estudo (2D: superior e 3D: inferior).

Nos modelos dos provetes reforçados considerou-se uma adesão perfeita entre os vários materiais (carbono, adesivo e madeira). Apenas se modelou 1/2 da geometria nos modelos 2D e 1/4 da geometria nos modelos 3D, procurando tirar partido das simetrias existentes. As malhas de elementos finitos foram construídas com elementos PLANE82 e SOLID95, respectivamente para os modelos 2D e 3D. A modelação do contacto foi feita usando as potencialidades do ANSYS®. Foram usados pares de contacto do tipo superfície-superfície com comportamento rígido-flexível para simular as condições de apoio e de aplicação de carga. Os elementos de contacto usados foram os pares TARGE169 e CONTA172, para os modelos 2D, e o TARGE170 e CONTA174, para os modelos 3D. O problema do contacto é governado por um extenso conjunto de parâmetros numéricos. Nas presentes simulações foi adoptado o algoritmo de contacto *Augmented Lagrange* com o modelo de atrito de *Coulomb*. De um modo geral foram usados os valores por defeito do ANSYS para os parâmetros de contacto, tendo-se feito apenas uma análise de sensibilidade a alguns deles, nomeadamente à rigidez normal de contacto, através do factor FKN. Este coeficiente representa um factor de escala a aplicar à rigidez normal de contacto estimada pelo código tendo em conta a elasticidade dos materiais em contacto. Mais detalhes sobre o parâmetro FKN assim como a modelação do contacto no ANSYS® podem ser encontrados em Santos et al. (2009).

### 3.1 – Rigidez numérica

Uma vez que se assumiu um comportamento linear elástico para os materiais, o modelo de elementos finitos desenvolvido apenas permite efectuar estimativas da rigidez inicial da viga. Na Tabela 2 resumem-se os resultados das simulações. O parâmetro FKN influencia de forma determinante os resultados das previsões. Em geral, a calibração dos modelos levou à consideração de um FKN inferior ao valor definido por defeito pelo ANSYS, entre 0.01 e 0.0375. O atrito teve uma influência desprezável nos resultados.

O desempenho dos modelos 2D demonstrou ser muito bom com um custo computacional reduzido. Também se incluí na Tabela 2 resultados dos modelos sem elementos de contacto, sendo os resultados pouco satisfatórios, com excepção da viga com 600 mm de reforço, simulada com o modelo tridimensional.

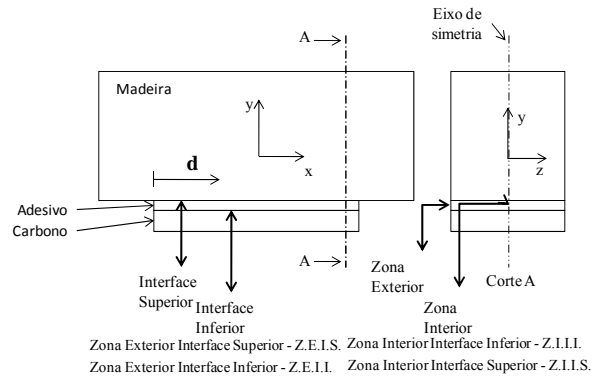
**Tabela 2** – Comparação entre resultados experimentais e resultados numéricos.

Modelo				K [N/mm]	Erro [%]
L <sub>p</sub> [mm]	Dim.	Conta.	FKN		
0	2D	Não	-----	1022.54	19.65
0	2D	Sim	1	1020.14	19.37
0	2D	Sim	0.01	839.56	1.76
0	3D	Não	-----	1026.20	20.08
0	3D	Sim	1.0	1016.04	18.89
0	3D	Sim	0.01	836.64	2.11
350	2D	Não	-----	1482.22	31.20
350	2D	Sim	1	1469.92	30.11
350	2D	Sim	0.025	1115.68	1.25
350	3D	Não	-----	833.60	26.21
350	3D	Sim	1	1470.96	30.20
350	3D	Sim	0.0375	1136.56	0.60
600	2D	Não	-----	1618.66	36.37
600	2D	Sim	1	1604.54	35.18
600	2D	Sim	0.025	1201.46	1.22
600	3D	Não	-----	1120.92	5.57
600	3D	Sim	1	1598.40	34.66
600	3D	Sim	0.0375	1142.48	-3.75

### 3.2 - Tensões nas interfaces carbono / madeira

Os modelos de elementos finitos desenvolvidos foram ainda validados por comparação com resultados de modelos analíticos já publicados, como referido anteriormente. Essa validação consistiu em adaptar os modelos analíticos [Abdelou-ahed (2006), Deng J. et al. (2004) e Björn Täljsten

(1997)] ao caso das vigas de madeira reforçadas com laminados de carbono, de forma a obter as tensões na interface, de corte e normais, que actuam perpendicularmente ao plano do carbono, nomeadamente  $\tau_{xy}$  e  $\sigma_{yy}$ . As tensões em questão foram medidas em várias zonas da interface, designadamente ao longo de duas linhas, no caso 2D, e de quatro linhas, no caso 3D como mostra a figura 5, usando os modelos de elementos finitos. As previsões das tensões na interface foram determinadas apenas utilizando os modelos mais próximos do experimental em ambos os casos, ou seja os modelos que apresentam menor erro na tabela 2. Os modelos analíticos apenas prevêem tensões constantes ao longo da espessura do adesivo.

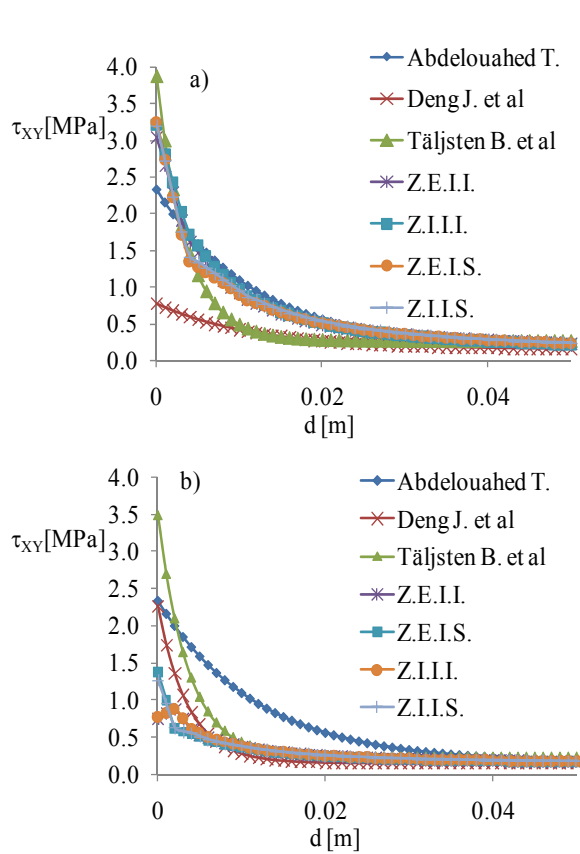


**Fig 5** – Linhas onde foram medidas as tensões de corte  $\tau_{xy}$  e normais  $\sigma_{yy}$ .

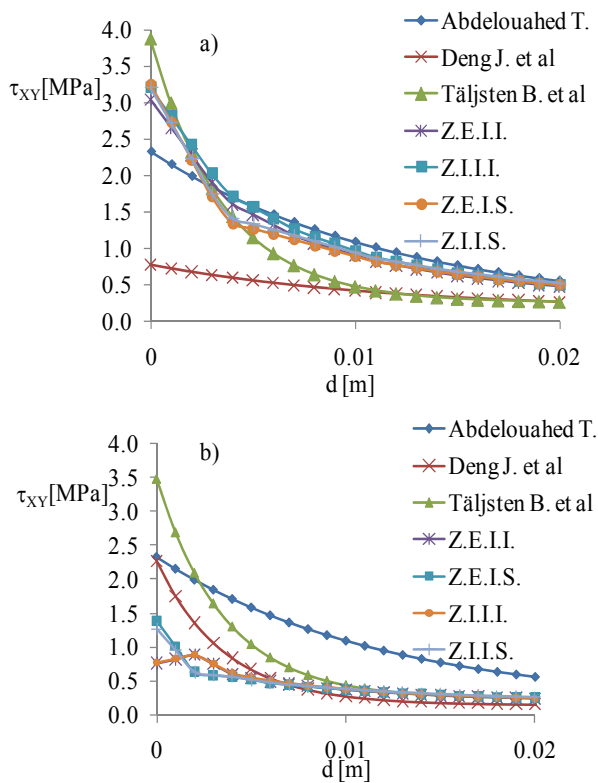
Os resultados obtidos para as tensões de corte e tensões normais dos modelos 3D com L<sub>p</sub> de 350 e 600 mm estão representados nas figuras 6, 7, 8 e 9.

Para o caso dos modelos 2D com L<sub>p</sub> de 350 e 600 mm, as tensões de corte e tensões normais encontram-se representadas nas figuras 10, 11, 12 e 13.

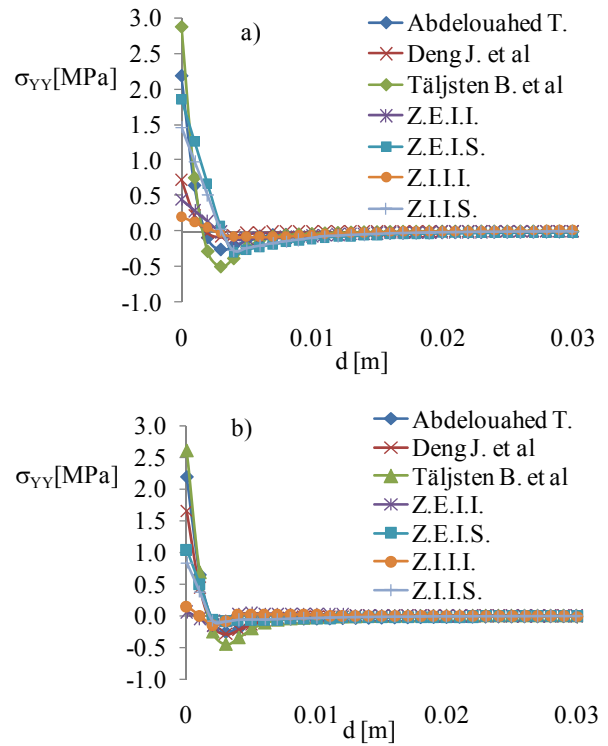
Como se pode comprovar pela análise dos gráficos das figuras anteriores verifica-se que tanto para o modelo 2D como para o modelo 3D, os modelos numéricos se aproximam muito dos modelos analíticos adaptados à madeira, a partir de determinada distância à extremidade do reforço. Observa-se alguma variabilidade de previsões entre modelos analíticos e numéricos para distâncias muito próximas da extremidade do reforço. No entanto, os dois tipos de modelos prevêem andamentos



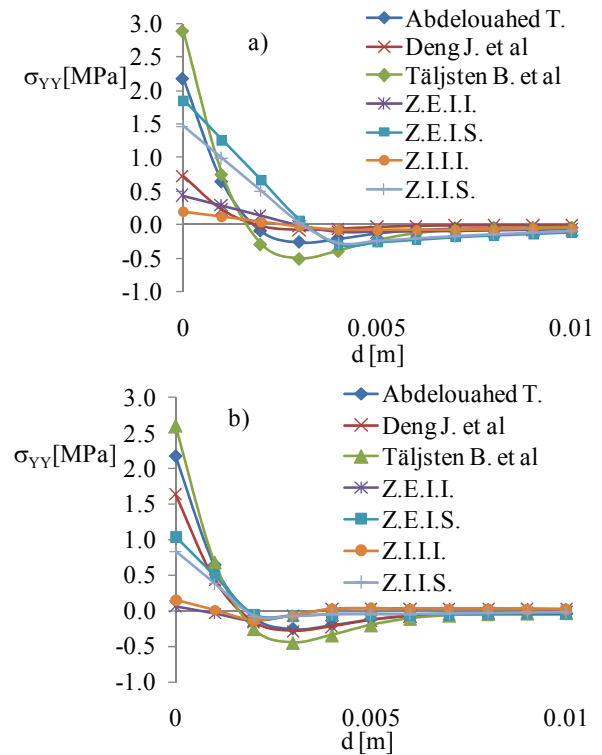
**Fig 6** - Tensões de corte na interface carbono-madeira para os modelos 3D: a)  $L_p=350$  mm; b)  $L_p=600$  mm.



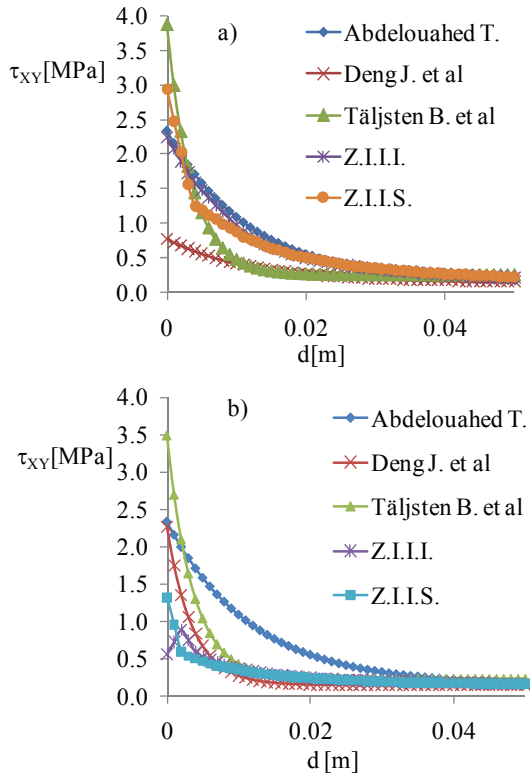
**Fig 7** - Ampliação das tensões de corte na interface carbono-madeira para os modelos 3D: a)  $L_p=350$  mm; b)  $L_p=600$  mm.



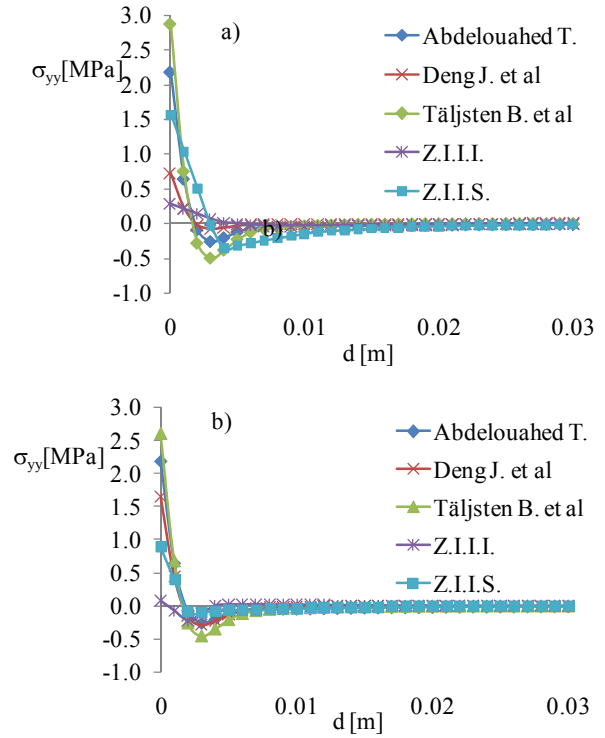
**Fig 8** - Tensões normais na interface carbono-madeira para os modelos 3D: a)  $L_p=350$  mm; b)  $L_p=600$  mm.



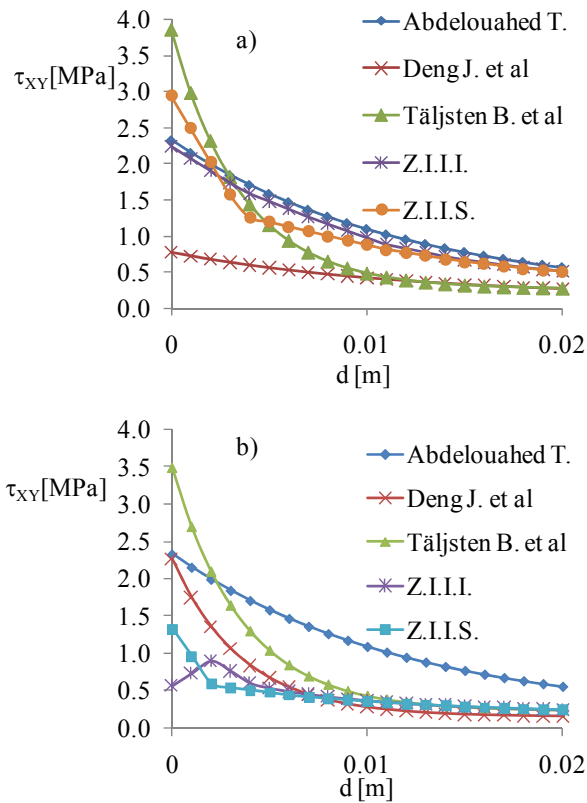
**Fig 9** - Ampliação das tensões normais na interface carbono-madeira para os modelos 3D: a)  $L_p=350$  mm; b)  $L_p=600$  mm.



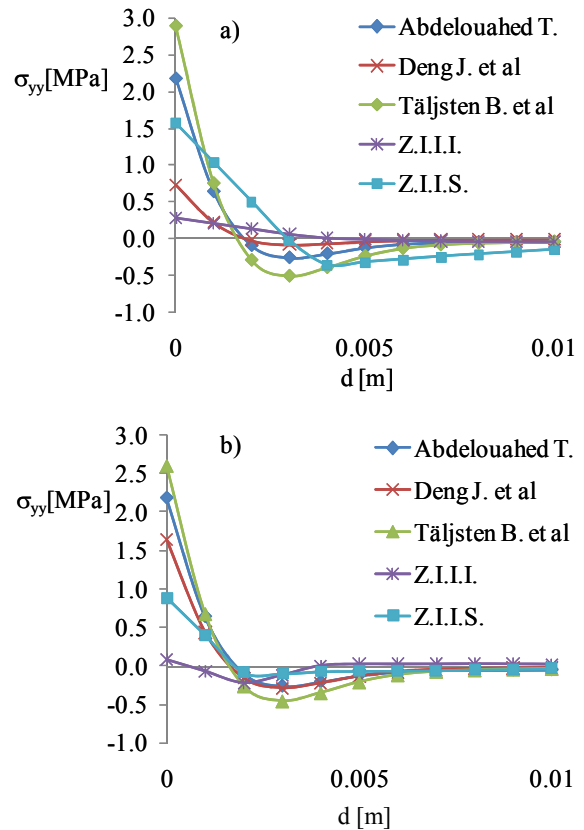
**Fig 10** - Tensões de corte na interface carbono-madeira para os modelos 2D: a)  $L_p=350$  mm; b)  $L_p=600$  mm.



**Fig 12** - Tensões normais na interface carbono-madeira para os modelos 2D: a)  $L_p=350$  mm; b)  $L_p=600$  mm.



**Fig 11** - Ampliação das tensões de corte na interface carbono -madeira para os modelos 2D: a)  $L_p=350$  mm; b)  $L_p=600$  mm.



**Fig 13** - Ampliação das tensões normais na interface carbono -madeira para os modelos 2D: a)  $L_p=350$  mm; b)  $L_p=600$  mm.

de tensões muito similares. Também se constata que os modelos numéricos prevêem tensões variáveis ao longo da espessura do adesivo, o mesmo não acontecendo nos modelos analíticos.

#### 4 – CONCLUSÕES FINAIS

Neste trabalho foram propostos modelos de elementos finitos para a análise de vigas reforçadas com laminados de carbono, tendo-se considerado quer modelos 2D quer modelos 3D. Os modelos 2D com elementos de contacto apresentam uma boa solução com baixo custo computacional. A utilização de modelos com contacto permitiu uma calibração dos modelos numéricos, conduzindo a resultados muito satisfatórios. Estes modelos calibrados foram usados na determinação das tensões na interface carbono/madeira, que é normalmente considerada a zona crítica das vigas reforçadas. Com efeito, um modo de rotura típico consiste na iniciação de fendas entre a extremidade do reforço e a viga, que se propagam para o interior desta última. Como se verificou anteriormente as tensões na interface laminado/madeira são máximas na extremidade do reforço e decrescem tendendo para zero. Embora os valores máximos obtidos por MEF não coincidam com os valores máximos dos modelos analíticos adaptados ao caso das vigas de madeira reforçada com laminados de carbono, importa referir que esses modelos foram propostos originalmente para vigas de betão e aço, e que nestes modelos as tensões na interface em causa são consideradas constantes ao longo da espessura. Como se verificou anteriormente pela análise das distribuições das tensões numéricas ao longo de várias linhas na interface, estas não coincidem pelo que se conclui que as tensões tanto de corte como normais não são constantes ao longo do adesivo.

Em termos de efeito de validação dos modelos numéricos para o caso do reforço de vigas de madeira com laminados de carbono, pode-se dizer que as gamas de distribuições de tensões dos modelos 3D se

enquadram bem nos modelos analíticos; em relação aos modelos 2D, no início do reforço o enquadramento pelos modelos analíticos não é visível, mas à medida que se avança no reforço este enquadramento acontece. O modelo 2D com contacto e  $FKN=0.025$  apresenta menor custo computacional e resultados com uma margem de erro bastante apertada, relativamente à estimativa da rigidez. Os modelos 3D com  $FKN=0.0375$  permitem obter resultados ainda mais exactos implicando, no entanto, um custo computacional mais elevado.

Em suma, os modelos de MEF foram ajustados com sucesso sendo obtidos resultados satisfatórios. Em termos de estudo das tensões na interface carbono/madeira tem-se por objectivo realizar testes experimentais mais conclusivos, que se possam apresentar futuramente.

#### BIBLIOGRAFIA

- Abdelouahed, T., Improved theoretical solution for interfacial stresses in concrete beams strengthened with FRP plate, *International journal of Solids and Structures*, Vo. 43, pag. 4154-4174, 2006.
- Deng, J. *et al.*, Stress analysis of steel beams reinforced with a bonded CFRP plate, *Composite Structures*, Vo. 65, pag. 205-215, 2004.
- Täljsten, B., Strengthening of Beams by Plate Bonding. *Journal of Materials in Civil Engineering*, pag. 205-212, 1997.
- Pinto, J., et al, Identificação do Estado de Tensão na Interface CFRP/Madeira, 4<sup>as</sup> Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, Lisboa, LNEC, 13-16 Dezembro 2006.
- Santos, C.L., et al, Quasi-static mechanical behaviour of a double-shear single dowel wood connection. *Construction and Building Materials*, Vo. 23, pag. 171-182, 2009.