

O MÉTODO LIVRE DE ELEMENTOS DE GALERKIN NA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS ANISOTRÓPICAS

Jorge Belinha¹, Lúcia M.J.S. Dinis²

¹Investigador no IDMEC, Instituto de Engenharia Mecânica

²Professor Associado do DEMEGI, FEUP, Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 PORTO

Telephone: +351 225081593/1716, email: ldinis@fe.up.pt

RESUMO

Um método livre de elementos, baseado numa formulação de Galerkin (EFGM), é apresentado para efeitos de análise não linear material de Estruturas anisotrópicas tipo Placa e tipo Laminado compósito simétrico. A Teoria de Reissner-Mindlin é considerada para efeitos de definição dos campos de deslocamentos e deformações. Para efeitos de construção das funções de forma considera-se o método dos mínimos quadrados ponderados. Faz-se uma breve descrição do algoritmo de solução utilizado para efeitos de solução do problema anisotrópico elasto-plástico. A superfície de cedência utilizada é apresentada.

1. INTRODUÇÃO

Neste trabalho o método sem malha utilizado é o EFGM, o qual utiliza na construção das funções de forma a aproximação pelo método dos mínimos quadrados, inicialmente proposta em [Nayroles (1992)]. O estudo de problemas elásticos bidimensionais é iniciado em [Belytschko (1994)] e tem continuação em [Dolbow (1998)]. Procedeu-se posteriormente [Belytschko (1996); Belytschko (1996)] à análise de placas finas recorrendo ao EFGM. A análise de placas espessas, com recurso ao EFGM, com a formulação de Reissner-Mindlin é apresentada em [Donning (1998)]. Esta formulação foi também considerada em [Nukulchai (2001)] com algumas modificações de forma a evitar o fenómeno da retenção ao corte. A análise pelo EFGM de laminados simétricos é apresentada em [Belinha (2004)]. No âmbito da análise elasto-plástica o EFGM foi inicialmente aplicado à dinâmica da fractura [Belytschko (1995); Belytschko (1996)], a problemas de

fendas e sua evolução [Belytschko (1995); Xu (1998)] e posteriormente a problemas bidimensionais [Kargarnovin (2003)] e tridimensionais [Belytschko (1997); Barry (1999); Belytschko (1999)].

Este trabalho pretende estender o EFGM à análise elasto-plástica de sólidos 2D, estados planos de tensão e de deformação, e de laminados simétricos com comportamento material anisotrópico. Apresentam-se aplicações do método para sólidos com comportamento material isotrópico e anisotrópico e comparam-se os resultados com soluções referenciadas e com as soluções obtidas com o MEF.

2 - MÉTODO LIVRE DE ELEMENTOS DE GALERKIN

O EFGM é considerado um método sem malha pois apenas é necessário, para gerar as equações discretas, um conjunto de nós, aleatoriamente espalhados no

domínio do problema, e uma descrição das fronteiras físicas e de carga do sólido. O EFGM emprega os aproximadores do Método dos Mínimos Quadrados (MLS) na construção das funções de forma com vista a aproximar a função $u^h(\mathbf{x})$, campo de deslocamentos aproximado, da função $u(\mathbf{x})$, campo de deslocamentos real da peça. A forma fraca de Galerkin é usada para desenvolver o sistema discreto de equações. É usada uma malha de células de integração para efeitos de cálculo dos sistemas matriciais.

2.1 - Aproximadores MLS

A aproximação pelo MLS é construída a partir de três componentes:

1. Uma função de peso de suporte compacto associada a cada nó.
2. Uma base, usualmente um polinómio.
3. Um conjunto de coeficientes dependentes da posição de cada nó.

A função de peso deve ser diferente de zero sobre um pequeno domínio na vizinhança de \mathbf{x}_I e zero fora deste, denominado por domínio de suporte da função de peso. O domínio de suporte da função de peso define o domínio de influência de \mathbf{x}_I , que é o domínio sobre o qual o nó I contribui para a aproximação. É a sobreposição destes domínios que garante a conectividade entre nós. A aproximação $u^h(\mathbf{x})$ da função $u(\mathbf{x})$ é definida no domínio Ω como,

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_i^m p_i(\mathbf{x}) a_i(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

sendo $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ os monómios no espaço das coordenadas $\mathbf{x}^T = (x,y)$ escolhidos de tal modo que a base seja completa [Belytschko (1994)]. Neste trabalho recorreu-se à base polinomial linear para a análise de problemas bidimensionais e à base quadrática para a análise de problemas de laminados.

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y\} \quad m = 3 \quad (2)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2\} \quad m = 6 \quad (3)$$

Os coeficientes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ são funções de \mathbf{x} e podem ser representados por,

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \{a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})\} \quad (4)$$

Estes coeficientes são obtidos, para qualquer ponto \mathbf{x} , minimizando a norma pesada discreta J,

$$\begin{aligned} J &= \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - u_I]^2 = \\ &= \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I]^2 \end{aligned} \quad (5)$$

onde n é o número de nós no interior do domínio de influência de \mathbf{x}_I , dentro do qual $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \neq 0$, e u_I é o parâmetro nodal de \mathbf{u} em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_I$. A minimização de J em relação a $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ leva à seguinte relação linear entre $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ e u_I ,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) u \quad (6)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) u \quad (7)$$

onde,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{p}(\mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \quad (8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \quad (9)$$

$$u = \sum_I^n u_I \quad (10)$$

Substituindo a equação (7) na equação (1), a função de aproximação do MLS para o campo de deslocamentos pode ser definida como,

$$\begin{aligned} u^h(\mathbf{x}) &= \sum_I^n \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} u_I = \\ &= \sum_I^n \phi_I(\mathbf{x}) u_I \end{aligned} \quad (11)$$

onde as funções de forma $\phi_I(\mathbf{x})$ são obtidas com,

$$\begin{aligned}\phi_I(\mathbf{x}) &= \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) \left(\mathbf{A}(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right)_{ji} = \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_I\end{aligned}\quad (12)$$

As derivadas parciais da função de forma podem ser obtidas como,

$$\begin{aligned}\phi_I(\mathbf{x})_{,x} &= \left(\mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_I \right)_{,x} = \\ &= \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_I + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B}_I + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{I,x}\end{aligned}\quad (13)$$

$\mathbf{A}_{,x}^{-1}$ pode ser determinado com $\mathbf{A}_{,x}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1}$, onde o índice representa a derivação espacial.

Na escolha da função de peso é importante ter em atenção dois aspectos. É a função de peso que confere a continuidade à função de aproximação e a sua escolha afecta directamente os resultados obtidos pelo EFGM [Dolbow (1998)]. Neste trabalho são usadas duas funções de peso, a spline cúbica, com continuidade C^1 , apresentada na equação (14) para problemas bidimensionais e a spline de sétima ordem, com continuidade C^3 , apresentada na equação (15).

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \equiv w(r) = \begin{cases} (2/3) - 4r^2 + 4r^3 & r < 0.5 \\ (4/3) - 4r + 4r^2 - (4/3)r^3 & 0.5 < r \leq 1.0 \\ 0 & r > 1.0 \end{cases} \quad (14)$$

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \equiv w(r) = \begin{cases} 1 + \left(-\frac{47}{10}\right)r^2 + 12r^4 + (-10)r^5 + \frac{1}{2}r^6 + \frac{6}{5}r^7 & r \leq 1.0 \\ 0 & r > 1.0 \end{cases} \quad (15)$$

Definindo a distância entre o ponto de interesse \mathbf{x}_I e o nó \mathbf{x} no interior do domínio de influência do ponto de interesse como $d_I = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$, então r , na equação (14), pode ser definido como $r = d_I / d_{mI}$, onde d_{mI} é o tamanho do domínio de influência do ponto de interesse I . De forma a obter-se a equação (13) é necessário determinar-se a derivada da função de peso.

2.2 - Sistema de equações

Aplicando a forma fraca de Galerkin,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{c}(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \\ - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^T \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) d\Gamma = 0\end{aligned}\quad (16)$$

Como o último termo da equação (16) indica, o método usado na imposição das condições de fronteira essenciais é o Método da Penalidade [Liu (1998)]. Os factores de penalidade em $\boldsymbol{\alpha}$ são constantes sobre todo o domínio, sendo $\alpha_{jj} = 1.0 \times 10^{10} \times (\text{máximo elemento da diagonal da matriz de rigidez})$ onde j é o número de graus de liberdade por nó [Zienkiewicz (1989)]. Com a equação (16) obtém-se o seguinte sistema matricial,

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha][\mathbf{U}] = [\mathbf{F} + \mathbf{F}^\alpha] \quad (17)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global assemblada usando,

$$\mathbf{K}_U = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{c} \mathbf{B}_I d\Omega \quad (18)$$

Para o Estado Plano de Deformação,

$$\mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} - \frac{\nu_{31}^2}{E_3} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} - \frac{\nu_{32}\nu_{31}}{E_3} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} - \frac{\nu_{12}\nu_{31}}{E_3} & \frac{1}{E_2} - \frac{\nu_{32}^2}{E_3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

enquanto que para o Estado Plano de Tensão,

$$\mathbf{c}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

A matriz \mathbf{B} é definida por,

$$\mathbf{B}_I^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_I}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \phi_I}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \phi_I}{\partial y} & \frac{\partial \phi_I}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Para os laminados,

$$\mathbf{c} = \sum_j^n \mathbf{T}_j^T \mathbf{Q}_j \mathbf{T}_j \quad (22)$$

onde n é o número de camadas do laminado, \mathbf{T}_j é a matriz de transformação da camada j e \mathbf{Q}_j é a matriz material da camada j .

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_1\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin \theta \cdot \cos \theta & -\sin \theta \cdot \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (24)$$

sendo θ a orientação da camada j . A matriz \mathbf{B} é definida por,

$$\mathbf{B}_i^T = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & -\frac{\partial \phi_i}{\partial y} & -\phi_i & 0 \\ 0 & -\frac{\partial \phi_i}{\partial y} & -\frac{\partial \phi_i}{\partial x} & 0 & -\phi_i \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_i}{\partial x} & \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (25)$$

onde ϕ_i é a função de forma do nó i . A matriz \mathbf{K}^α é a matriz dos factores de penalidade,

$$\mathbf{K}_U^\alpha = \int_{\Gamma_u} \bar{\phi}_I^T \boldsymbol{\alpha} \bar{\phi}_J d\Gamma \quad (26)$$

$\boldsymbol{\alpha}$ é a matriz diagonal de $n \times n$ elementos (n é o número de graus de liberdade por nó) e $\bar{\phi}_I$ é também uma matriz diagonal $n \times n$, com os termos da diagonal iguais a um quando o respectivo grau de liberdade está condicionado e zero se contrário. O vector \mathbf{F}^α é definido por $\mathbf{F}_U^\alpha = \int_{\Gamma_u} \bar{\phi}_I^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{u}_0 d\Gamma$ e representa as forças que resultam da imposição das condições de fronteira essenciais.

2.3 - Integração numérica

A malha nodal a usar pelo EFGM pode ser constituída por nós aleatoriamente espalhados no domínio do problema, no entanto é necessário construir uma malha de fundo para efeitos de integração de forma a obterem-se as equações que regem o fenómeno em estudo. Neste trabalho utilizou-se uma malha de integração de pontos de quadratura de Gauss baseada na malha de nós, uma vez que apenas foram consideradas malhas nodais regulares. A relação entre o número de pontos de integração e o número de nós está dependente de diversos factores, tais como a ordem da base polinomial, a ordem da função de peso e o número de nós no interior do domínio de influência [Belinha (2004)].

Assim no caso dos problemas bidimensionais usando um número mínimo de 20 nós no interior de cada domínio de influência, uma base polinomial linear e uma “spline” cúbica sugere-se o uso de 4×4 pontos de quadratura de Gauss dentro de cada célula de integração, tal como a figura 1(b) indica. No caso da análise de laminados usando um número mínimo de 16 nós no interior de cada domínio de influência, uma base polinomial quadrática e uma “spline” de sétima ordem, o uso de 6×6 pontos de quadratura de Gauss dentro de cada célula de integração, tal como a figura 1(c) indica, parece ser o mais adequado.

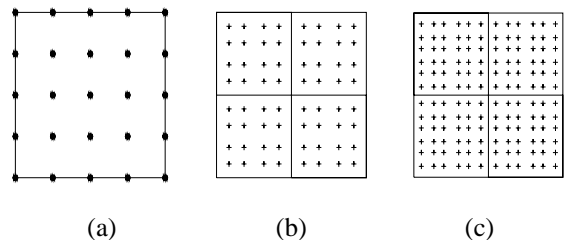


Fig 1 - (a) Malha nodal e correspondente (b) malha de fundo de integração de 4×4 pontos de quadratura de Gauss por célula de integração e de (c) 6×6 pontos de quadratura de Gauss por célula de integração

3 - PLASTICIDADE APLICADA AO EFGM

A teoria da plasticidade requer três conceitos fundamentais [Hill (1950)], um critério de cedência, uma regra de

encruamento e uma regra de escoamento plástico.

A existência de uma superfície de cedência inicial define o limite elástico do material para um estado multiaxial de tensão. O critério de cedência depende do estado da tensão e da história do carregamento, podendo ser definido pela equação (27). A superfície de cedência é dependente de um parâmetro de encruamento k , no caso do material ser isotrópico, a superfície de cedência depende apenas da magnitude das tensões principais aplicadas e é independente das correspondentes orientações.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, k) = f(\boldsymbol{\sigma}, k) - \sigma_Y(k) = 0 \quad (27)$$

sendo $f(\boldsymbol{\sigma}, k)$ a função de cedência dependente do parâmetro de encruamento k e do estado de tensão. A tensão de cedência do material é também dependente de k e é definida por $\sigma_Y(k)$.

3.1 - Superfície de cedência anisotrópica

O critério de cedência anisotrópico usado neste trabalho é o critério generalizado de Huber-Mises [Hill (1950)], também conhecido por critério de cedência de Hill, para materiais com comportamento anisotrópico. Para problemas de placas com a formulação de Reissner-Mindlin, a função de cedência generalizada é definida por,

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \left[a_1 \sigma_{xx}^2 + a_{12} \sigma_{xx} \sigma_{yy} + a_2 \sigma_{yy}^2 + a_3 \tau_{xy}^2 + a_4 \tau_{yz}^2 + a_5 \tau_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \bar{\sigma} \quad (28)$$

Sendo a_i os parâmetros anisotrópicos do material. A equação (28) pode ser apresentada na forma,

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \bar{\sigma} = \left[\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{M}_A \boldsymbol{\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}$ é o vector das tensões e \mathbf{M}_A é a matriz de parâmetros anisotrópicos definida por,

$$\mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} a_1 & \frac{a_{12}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{a_{12}}{2} & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Os parâmetros de anisotropia iniciais, antes da ocorrência de encruamento, podem ser determinados recorrendo a seis testes de cedência independentes. Para cada um destes seis testes impõe-se o anulamento de todas as componentes da tensão, na função de cedência, à excepção da componente pretendida. Assim para a direcção principal 1, ensaia-se o material à tracção segundo essa direcção e obtém-se o parâmetro de anisotropia segundo essa mesma direcção.

$$a_{10} = \left[\frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_{Y10}} \right]^2 \quad (31)$$

onde $\bar{\sigma}_0$ é a tensão de cedência uniaxial na direcção de referência e σ_{Y10} é a tensão de cedência uniaxial na direcção 1 antes da ocorrência de encruamento. Note-se que se a direcção 1 for considerada como direcção de referência, então $a_{10} = 1.0$. Da mesma forma é possível encontrar os restantes parâmetros anisotrópicos.

A equação (31) indica que os parâmetros anisotrópicos são dependentes da superfície de cedência actualizada. Os parâmetros de anisotropia vão variar também ao longo do processo de deformação plástica. De forma a determinar os valores correntes dos parâmetros de anisotropia, supõe-se que o trabalho de deformação plástica realizado pelas tensões em cada uma das direcções, para uma dada variação da tensão efectiva $\bar{\sigma}$, é o mesmo [Owen (1983); Owen (1983)]. Assim o trabalho desenvolvido pela tensão de cedência na direcção 1 supondo uma variação linear do encruamento no material é definido por,

$$\frac{1}{2} \varepsilon_1^p (\sigma_{Y10} + \sigma_{Y1}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^p (\bar{\sigma}_0 + \bar{\sigma}) \quad (32)$$

e sabendo que,

$$\sigma_{Y1} - \sigma_{Y10} = E_{T1} \varepsilon_1^p \quad (33)$$

$$\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_o = E_T \bar{\varepsilon}^p \quad (34)$$

obtém-se,

$$\sigma_{Y1}^2 = \frac{E_{T1}}{E_T} (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_o^2) + \sigma_{Y10}^2 \quad (35)$$

Desta forma o valor actualizado do parâmetro de anisotropia pode ser definido por,

$$a_1 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{Y1}} \right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{E_{T1}}{E_T} \right] \cdot (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_o^2) + \sigma_{Y10}^2} \quad (36)$$

Seguindo o mesmo raciocínio para os restantes parâmetros,

$$a_2 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{Y2}} \right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{E_{T2}}{E_T} \right] \cdot (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_o^2) + \sigma_{Y20}^2} \quad (37)$$

$$a_3 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\tau_{Y12}} \right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{G_{T12}}{E_T} \right] \cdot (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_o^2) + \tau_{Y120}^2} \quad (38)$$

$$a_4 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\tau_{Y23}} \right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{G_{T23}}{E_T} \right] \cdot (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_o^2) + \tau_{Y230}^2} \quad (39)$$

$$a_5 = \left[\frac{\bar{\sigma}}{\tau_{Y31}} \right]^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{G_{T31}}{E_T} \right] \cdot (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_o^2) + \tau_{Y310}^2} \quad (40)$$

Para se obter o parâmetro a_{120} é necessário recorrer-se a um novo teste de tracção uniaxial, onde o provete a ensaiar [Owen (1983); Owen (1983)] é obtido considerando o plano material 1-2. Estando o eixo do provete orientado segundo um ângulo β em relação ao eixo 1 e denominando $\sigma_{Y\beta o}$ como tensão de cedência uniaxial no plano 1-2 segundo uma orientação β , é possível estabelecer as seguintes relações,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{xx} = \sigma_{Y\beta o} \cdot \cos^2(\beta) \\ \sigma_2 = \sigma_{yy} = \sigma_{Y\beta o} \cdot \sin^2(\beta) \\ \tau_{12} = \tau_{xy} = \sigma_{Y\beta o} \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta) \end{cases} \quad (41)$$

Introduzindo as equações (41) na equação (28) obtém-se,

$$\bar{\sigma}_o = \left[a_{10} [\sigma_{Y\beta o} \cdot \cos^2(\beta)]^2 + a_{120} [\sigma_{Y\beta o} \cdot \sin^2(\beta) \cdot \cos^2(\beta)] + a_{20} [\sigma_{Y\beta o} \cdot \sin^2(\beta)]^2 + a_{30} [\sigma_{Y\beta o} \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

e assim,

$$a_{12} = \frac{\bar{\sigma}^2}{\left[\frac{E_{T\beta}}{E_T} \right] \cdot (\bar{\sigma}^2 - \bar{\sigma}_o^2) \cdot \sin^2(\beta) \cdot \cos^2(\beta) - \frac{a_1 \cos^2(\beta) + a_2 \sin^2(\beta) + a_3 \sin^2(\beta) \cdot \cos^2(\beta)}{\sin^2(\beta) \cdot \cos^2(\beta)}} \quad (43)$$

Sendo E_{T1} , E_{T2} e $E_{T\beta}$ os módulos tangenciais segundo as direcções 1, 2 e β respectivamente. E_T é o módulo tangencial efectivo ou de referência. G_{T12} , G_{T23} e G_{T31} representam as inclinações das curvas de tensão de corte/deformação plástica. Estas grandezas são independentes e obtidas experimentalmente.

Se o par de eixos principais do material (1,2) não coincidirem com os eixos (x,y) do referencial global, então os parâmetros de anisotropia deverão ser transformados para o referencial global. Supõe-se agora que uma dada camada do laminado tem uma orientação θ em relação ao referencial global, como indica a figura 2. Então aplicando a matriz de transformação \mathbf{T} , equação (24), é possível escrever a tensão efectiva da seguinte forma,

$$f(\sigma) = \bar{\sigma} = \left[\sigma^T \bar{\mathbf{M}}_A \sigma \right]^{\frac{1}{2}}$$

onde

$$\bar{\mathbf{M}}_A = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_A \mathbf{T} \quad (45)$$

ou seja, actua-se directamente nos parâmetros de anisotropia, criando uma nova matriz de parâmetros anisotrópicos que já contabiliza a orientação da camada do laminado.

Definindo o vector fluxo como,

$$\mathbf{a} = \partial f / \partial \sigma_{ij} = \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_{zz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} \right] \quad (46)$$

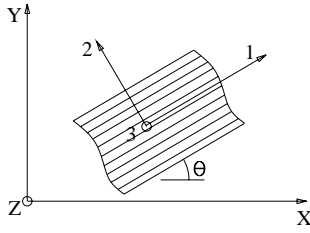


Fig 2 - Orientação das direcções principais (1,2) de elasticidade do laminado em relação ao eixo do referencial global (x,y,z)

e considerando a função de cedência apresentada em (29) obtém-se,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xx}} &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[\bar{a}_{11} \sigma_{xx} + \bar{a}_{12} \sigma_{yy} + \bar{a}_{13} \tau_{xy} \right] \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{yy}} &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[\bar{a}_{12} \sigma_{xx} + \bar{a}_{22} \sigma_{yy} + \bar{a}_{23} \tau_{xy} \right] \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[\bar{a}_{13} \sigma_{xx} + \bar{a}_{23} \sigma_{yy} + \bar{a}_{33} \tau_{xy} \right] \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[\bar{a}_{44} \tau_{yz} + \bar{a}_{45} \tau_{zx} \right] \\ \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} &= \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[\bar{a}_{45} \tau_{yz} + \bar{a}_{55} \tau_{zx} \right] \end{aligned} \quad (51)$$

3.2 - Retorno das tensões à superfície de cedência

Neste trabalho, tal como em [Owen (1980)], o comportamento material é modulado como uma relação incremental entre o vector do incremento de tensão $d\sigma$ e o incremento de deformação $d\epsilon$. Assim o algoritmo de retorno à superfície de cedência assume que,

1) O incremento de deformação total é a soma do incremento de deformação elástica com o de deformação plástica,

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (52)$$

onde $d\sigma^e = c d\epsilon^e$, sendo $d\sigma^e$ o incremento de tensão ainda no interior da superfície de cedência.

2) O critério de cedência é definido por $f(\sigma) \leq \sigma_Y^*$, onde a função $f(\sigma)$ é definida genericamente pela equação (44) e σ_Y^* pode ser definido por,

$$\sigma_Y^* = \sigma_Y + \left[E \cdot \bar{\epsilon}_{i-1}^p \right] \quad (53)$$

sendo E o módulo de elasticidade de referência, σ_Y a tensão de cedência de referência e $\bar{\epsilon}_{i-1}^p$ a deformação plástica acumulada efectiva da iteração anterior.

3) O factor de redução R é dado pela equação (54), onde $\bar{\sigma}_i^{\text{exp}}$ é a tensão total efectiva da actual iteração obtida elasticamente pela equação (44) para $\sigma = \sigma_i^{\text{exp}}$. A tensão efectiva da iteração anterior é designada por $\bar{\sigma}_{i-1}$.

$$R = \frac{\bar{\sigma}_i^{\text{exp}} - \sigma_Y^*}{\bar{\sigma}_i^{\text{exp}} - \bar{\sigma}_{i-1}} \quad (48) \quad (54)$$

$$(49)$$

4) A parte elástica e plástica são definidas por,

$$(50)$$

$$\text{elástica, } \sigma^e = (1-R) \sigma_i^{\text{exp}} \quad (55)$$

$$\text{plástica, } \sigma^p = (R) \sigma_i^{\text{exp}} \quad (56)$$

5) O vector normal à superfície de cedência, ou vector fluxo, é definido por,

$$a = \frac{\partial f(\sigma^e)}{\partial \sigma} \quad (57)$$

6) A projecção do vector σ^p no vector norma do vector fluxo a , e_a , é dada por,

$$\Delta \sigma_a^p = \|\sigma^p\| \cdot \left[e_{\sigma^p} \mid e_a \right] \cdot e_a \quad (58)$$

onde $\|\sigma^p\|$ é a norma do vector σ^p , $\left[e_{\sigma^p} \mid e_a \right]$ é o produto interno entre os vectores e_{σ^p} e e_a , sendo e_{σ^p} o vector norma de σ^p .

7) A correcção da parte plástica da tensão é obtida por,

$$\Delta \sigma^p = \sigma^p - \Delta \sigma_a^p \quad (59)$$

Assim,

$$\sigma_i^{(1)} = \sigma^e + \Delta\sigma^p \quad (60)$$

No entanto, como é visível pela figura 3, ainda não se atingiu na realidade a superfície de cedência com a equação (60). Tem de se repetir todo o processo de (1) a (7), agora com $\sigma = \sigma_i^{(1)}$, até se atingir,

$$f(\sigma_i^{(r)}) \leq \sigma_Y^* + \Delta e \quad (61)$$

onde Δe é uma tolerância de referência e (r) o número de vezes que o processo foi repetido.

Na figura 3 é apresentada uma primeira tentativa de retorno do incremento de tensão de um dado ponto à superfície de cedência.

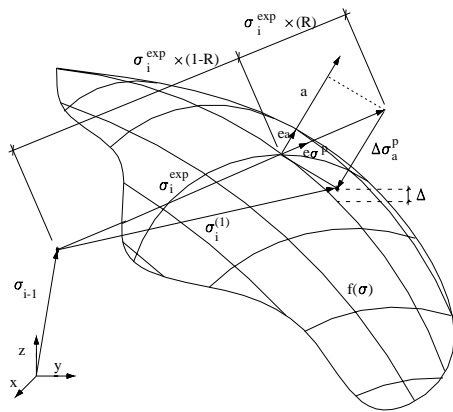


Fig 3 - Retorno do incremento de tensão a um contínuo elasto-plástico no caso da cedência inicial.

3.3 - Algoritmo de solução elasto-plástica pelo EFGM

Neste trabalho o método de solução não-linear utilizado é o método da rigidez inicial [Owen (1980)]. Neste método a matriz de rigidez é calculada apenas uma vez, na primeira iteração do primeiro incremento de carga. O algoritmo de solução é apresentado na figura 4.

4 - EXEMPLOS NUMÉRICOS

4.1 - Membrana de Cook – isotrópica

Considere-se o sólido com as características geométricas e condições de fronteira essenciais representadas na figura 5(a). É considerado o Estado Plano de Tensão.

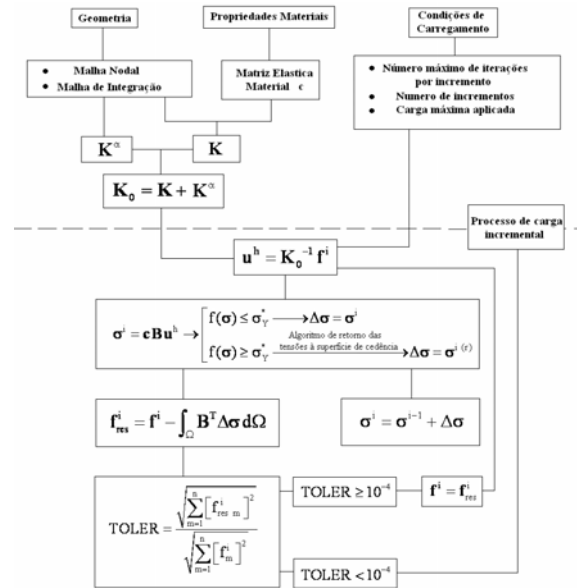


Fig 4 - Algoritmo de Solução não-linear utilizado na análise pelo EFGM

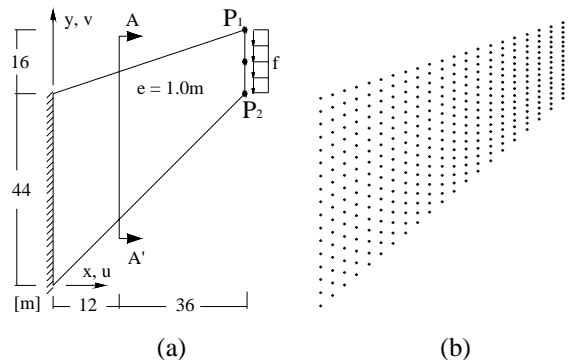


Fig 5 - (a) Características geométricas e condições de carregamento e de apoio do sólido. (b) Malha nodal regular de 357 nós.

O material da membrana tem as seguintes características mecânicas: $E=1E+06$ kPa, $E_T=1E+03$ kPa, $\sigma_Y = 200E+03$ kPa e $\nu = 0.3$. Discretizou-se o problema numa malha regular de 357 nós, como indica a figura 5(b). Esta é a malha utilizada tanto na análise pelo EFGM como na análise pelo MEF. Utilizaram-se na resolução do problema os algoritmos de solução não-linear KT0 e KT1, sendo o algoritmo KT0 o apresentado na secção 3.3 e o algoritmo KT1 o algoritmo de rigidez inicial por cada incremento, onde a matriz de rigidez é recalculada no início de cada novo incremento [Owen (1980)]. Na figura 6 são apresentados os resultados refe-

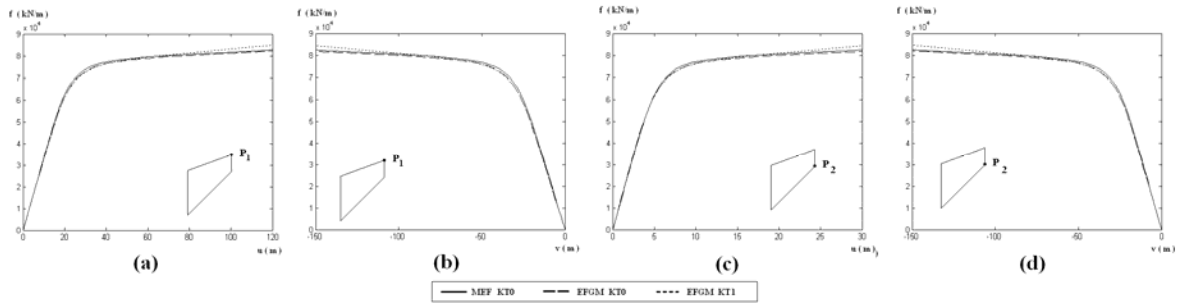


Fig 6 - Diagramas carga/deslocamento. (a) Componente u do deslocamento no ponto P₁ (b) Componente v do deslocamento no ponto P₁ (c) Componente u no ponto P₂ (d) Componente v no ponto P₂

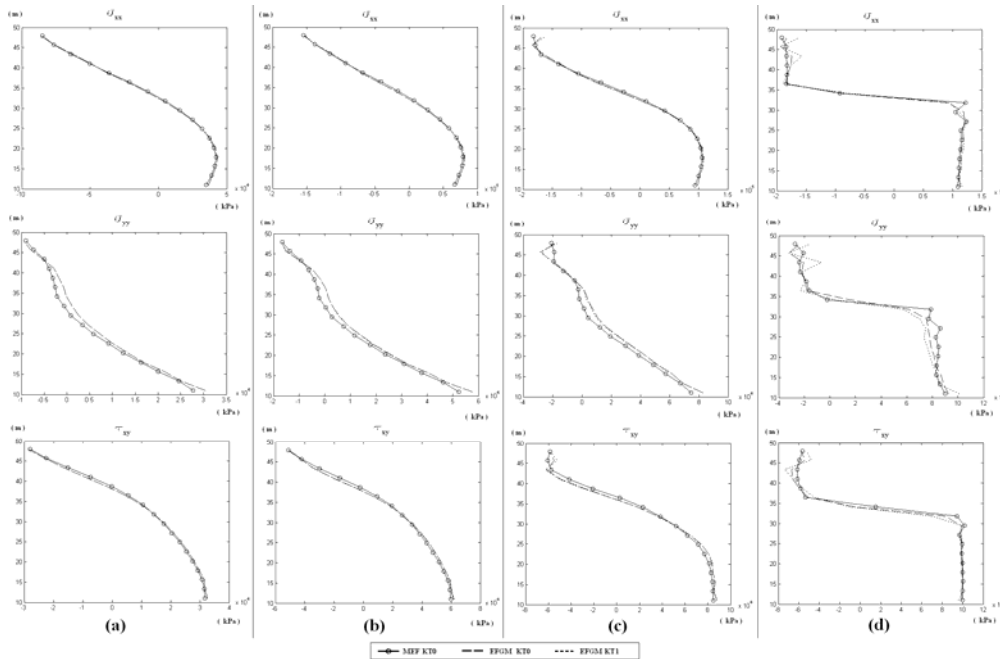


Fig 7 - Diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e de corte τ_{xy} para (a) $f = 2.7625 \times 10^4$ kN/m, (b) $f = 5.1 \times 10^4$ kN/m, (c) $f = 7.0125 \times 10^4$ kN/m e (d) $f = 8.5 \times 10^4$ kN/m

rentes às componentes u e v, segundo x e y respectivamente, do deslocamento dos pontos P₁ e P₂, indicados na figura 5, em função da carga f aplicada.

Apresentam-se seguidamente, na figura 7, os diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e da tensão de corte τ_{xy} ao longo da secção AA' para diferentes níveis crescentes de carga.

A figura 7(a) refere-se a uma carga que ainda não provoca cedência em nenhum ponto do sólido. Os digramas de tensões, representados na figura 7(b), são para uma carga que provoca a cedência de alguns pontos na secção da fronteira. Os diagramas das figuras 7(c) e 7(d) referem-se respectivamente ao início da plastificação de alguns dos pontos da

secção AA' e da plastificação total da secção AA'. É visível a boa concordância de resultados entre o EFGM e o MEF.

4.2 - Membrana de Cook – anisotrópica

Considere-se a membrana de Cook formada com dois tipos de materiais diferentes como indica a figura 8(a). São consideradas as hipóteses do Estado Plano de Tensão.

O material 1 da membrana tem as seguintes características mecânicas, $E = 2E+06$ kPa, $E_T = 5E+04$ kPa, $\nu = 0.25$ e $\sigma_Y = 250E+03$ kPa e o material 2 tem as seguintes características mecânicas, $E = 1E+06$ kPa, $E_T = 1E+03$ kPa, $\nu = 0.3$ e $\sigma_Y = 200E+03$ kPa.

Discretizou-se o problema com 357 nós como indica a figura 8(b) e analisou-se o problema pelo EFGM KT0, pelo EFGM KT1 e pelo MEF KT0. Na figura 9 são apresentados os resultados relativos às componentes u e v do deslocamento dos pontos P₁ e P₂ em função da carga f aplicada. Tal como no ponto anterior é visível a boa concordância nos resultados entre o EFGM e o MEF.

Apresentam-se na figura 10 os diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e da tensão de corte τ_{xy} ao longo da secção AA' para diferentes níveis crescentes de carga.

A figura 10(a) refere-se a uma carga que ainda não provoca cedência em nenhum pon-

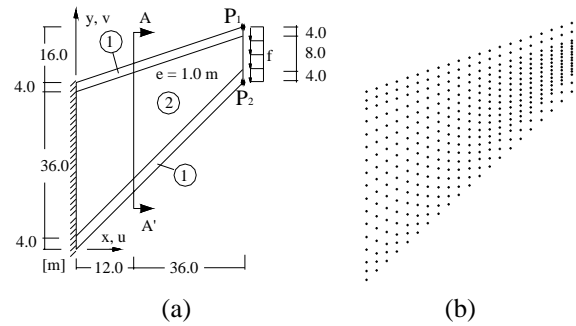


Fig 8 - (a) Características geométricas e condições de carregamento e de apoio do sólido. (b) Malha nodal regular de 357 nós.

to do sólido. Os digramas de tensões, representados na figura 10(b), são para uma carga que provoca o início da cedência em alguns pontos na secção da fronteira

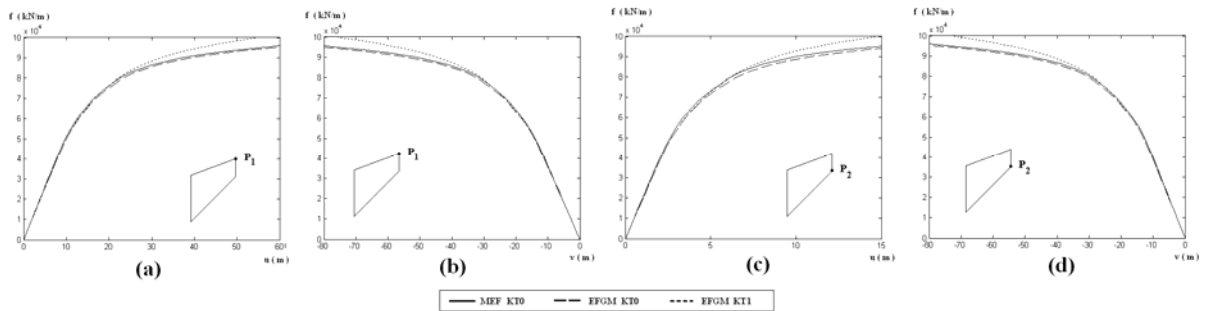


Fig 9 - Diagramas carga/deslocamento. (a) Componente u do deslocamento no ponto P₁ (b) Componente v do deslocamento no ponto P₁ (c) Componente u no ponto P₂ (d) Componente v no ponto P₂

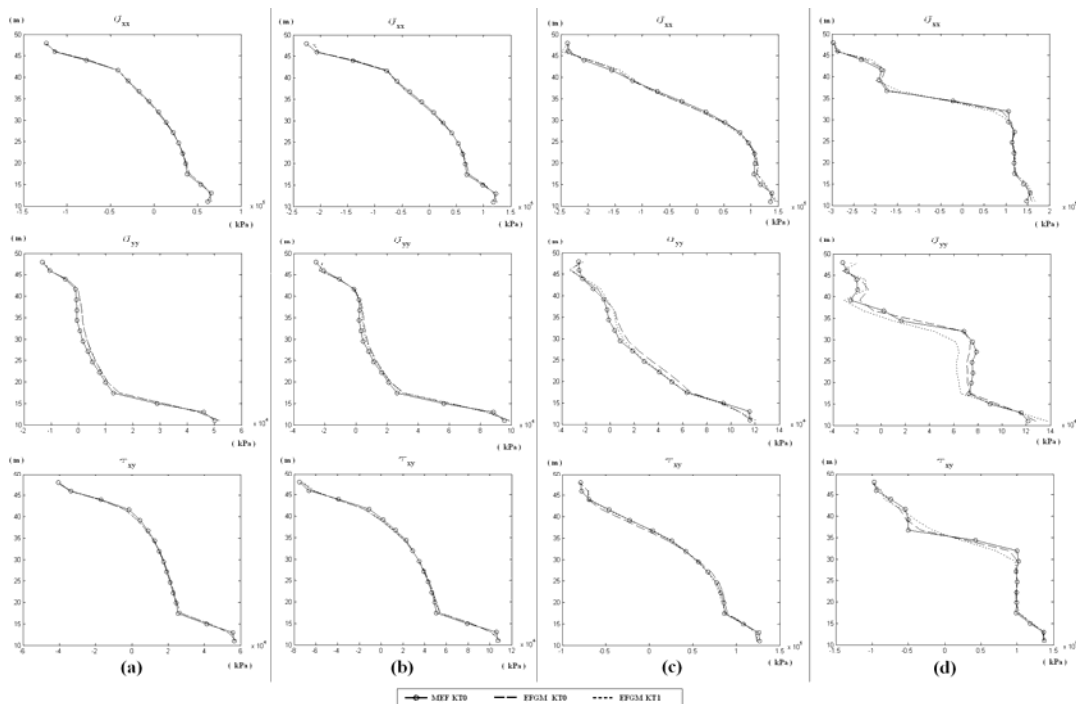


Fig 10 - Diagramas das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e de corte τ_{xy} para (a) $f = 3.25 \times 10^4$ kN/m, (b) $f = 6.0 \times 10^4$ kN/m, (c) $f = 8.25 \times 10^4$ kN/m e (d) $f = 10.0 \times 10^4$ kN/m

do problema. Os diagramas das figuras 10(c) e 10(d) referem-se respectivamente ao início da plastificação de alguns dos pontos da secção AA' e à plastificação de grande parte dos pontos da secção AA'.

É visível a boa concordância de resultados entre o EFGM e o MEF. Nos próximos exemplos apenas se aplica o algoritmo KT0 como algoritmo de solução não-linear, pois o algoritmo de solução não-linear KT1 apresenta um maior custo computacional em relação ao KT0. Este facto resulta do tempo de cálculo da matriz de rigidez para cada novo incremento não compensar o menor número de iterações calculadas em cada incremento.

4.3 - Placa quadrada simplesmente apoiada em todo o contorno

Considere-se uma placa quadrada simplesmente apoiada em todo o contorno. Este é um exemplo bastante estudado e cuja solução elasto-plástica pelo MEF pode ser encontrada em [Owen (1980)].

As características mecânicas da placa são as seguintes: $E = 2.067E+08$, $E_T = 2.067E+06$, $\sigma_Y = 2.067E+05$ kPa e $\nu = 0.3$

Analisou-se o problema pelo EFGM e pelo MEF considerando uma malha regular de 441 nós (21x21). O resultado do deslocamento normalizado do ponto central da placa em função da carga aplicada é apresentado na figura 11. Como é visível o diagrama carga/deslocamento obtido pelo EFGM é bastante similar à curva do elemento finito heterosis, obtida em [Owen (1980)].

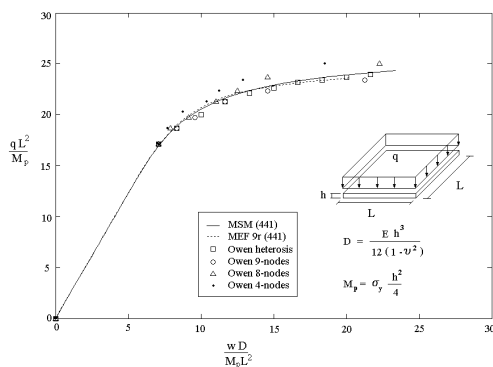


Fig 11 - Diagrama carga/deslocamento normalizado

4.4 - Laminado encastrado

Inicia-se o estudo dos laminados com um laminado encastrado em dois lados opostos sujeito a um carregamento uniformemente distribuído, como indica a figura 12. O laminado é constituído por 3 camadas, como indica a figura 12(b), constituídas com o mesmo material anisotrópico orientado segundo direcções distintas.

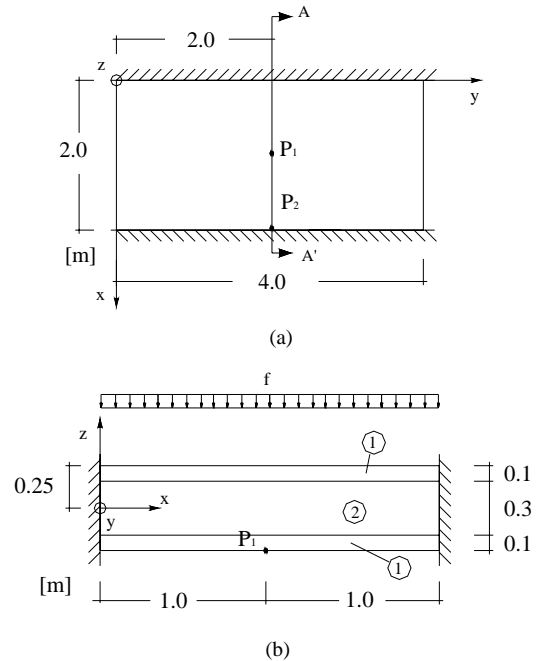


Fig 12 - (a) Características geométricas do laminado encastrado (b) Camadas constituintes do laminado

As características mecânicas do material 1, admitindo que os eixos principais de elasticidade (1,2,3) são coincidentes com o referencial global (x,y,z), são :

$E_1 = 200 \times 10^6$ kPa	$E_{T1} = 200 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y1} = 200 \times 10^3$ kPa	$\nu_{12} = 0.30$
$E_2 = 100 \times 10^6$ kPa	$E_{T2} = 100 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y2} = 150 \times 10^3$ kPa	$\nu_{12} = 0.15$
$G_{12} = 77 \times 10^6$ kPa	$G_{T12} = 77 \times 10^3$ kPa	$\tau_{Y12} = 115.47 \times 10^3$ kPa	
$G_{23} = G_{31} = G_{12}$	$G_{T23} = G_{T31} = G_{T12}$	$\tau_{Y23} = \tau_{Y31} = \tau_{Y12}$	
$E_{T\phi} = 200 \times 10^3$ kPa	$E_T = E_{T1}$	$\sigma_\phi = 200 \times 10^3$ kPa	$\phi = 45^\circ$
$E = E_1$		$\sigma_Y = \sigma_{Y1}$	

O material 2 tem propriedades idênticas mas está rodado de 90°. É de notar que o material além de apresentar anisotropia material apresenta encruamento anisotrópico. Na análise do laminado pelo MEF, elemento finito de nove nós com integração reduzida (MEF 9n), e pelo EFGM, considerando a base polinomial quadrática e a spline de sétima ordem como função de peso (EFGM s7p2),

considerou-se a teoria de Reissner-Mindlin. Em ambas as análises o laminado foi discretizado considerando a malha apresentada na figura 13(a).

Para se obter resultados susceptíveis de comparação com os anteriores, considerou-se a placa em sandwich apresentada na figura 12(b), que corresponde ao corte pela secção AA' do laminado em estudo, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído como indicado. Consideraram-se as hipóteses do Estado Plano de Deformação e analisou-se o problema pelo EFGM. Como se trata de um problema Bidimensional utilizou-se como base o polinómio linear e como função de peso a spline cúbica (EFGM sp3p1). Tomando os eixos materiais 1, 2 e 3 coincidentes com os eixos globais x, z e y respectivamente, obtêm-se as seguintes características mecânicas:

Material 1,

$E_1 = 200 \times 10^6$ kPa	$E_{T1} = 200 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y1} = 200 \times 10^3$ kPa	$\nu_{12} = 0.30$
$E_2 = 200 \times 10^6$ kPa	$E_{T2} = 200 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y2} = 200 \times 10^3$ kPa	$\nu_{23} = 0.30$
$E_3 = 100 \times 10^6$ kPa	$E_{T3} = 100 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y3} = 150 \times 10^3$ kPa	$\nu_{23} = 0.30$
$G_{12} = 77 \times 10^6$ kPa	$G_{T12} = 77 \times 10^3$ kPa	$\tau_{Y12} = 115.47 \times 10^3$ kPa	
$G_{23} = G_{31} = G_{12}$	$G_{T23} = G_{T31} = G_{T12}$	$\tau_{Y23} = \tau_{Y31} = \tau_{Y12}$	
$E = E_1$	$E_T = E_{T1}$	$\sigma_Y = \sigma_{Y1}$	

Material 2,

$E_1 = 100 \times 10^6$ kPa	$E_{T1} = 100 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y1} = 150 \times 10^3$ kPa	$\nu_{12} = 0.30$
$E_2 = 200 \times 10^6$ kPa	$E_{T2} = 200 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y2} = 200 \times 10^3$ kPa	$\nu_{23} = 0.30$
$E_3 = 200 \times 10^6$ kPa	$E_{T3} = 200 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y3} = 200 \times 10^3$ kPa	$\nu_{23} = 0.30$
$G_{12} = 77 \times 10^6$ kPa	$G_{T12} = 77 \times 10^3$ kPa	$\tau_{Y12} = 115.47 \times 10^3$ kPa	
$G_{23} = G_{31} = G_{12}$	$G_{T23} = G_{T31} = G_{T12}$	$\tau_{Y23} = \tau_{Y31} = \tau_{Y12}$	
$E = E_1$	$E_T = E_{T1}$	$\sigma_Y = \sigma_{Y1}$	

Discretizou-se o problema como indica a figura 13(b) e procedeu-se à análise elasto-plástica do problema pelo EFGM.

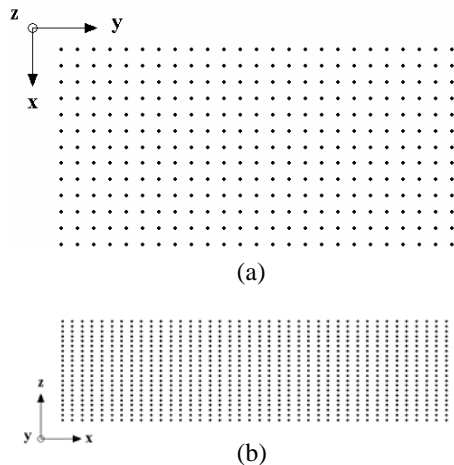


Fig 13 - (a) Malha utilizada na análise do laminado, 325 nós. (b) Malha utilizada na análise da placa bidimensional em sandwich, 861 nós.

Os resultados referentes ao deslocamento no centro do laminado à flexão, ponto P₁, e ao deslocamento no centro da placa em sandwich, Estado Plano de Deformação, ponto P₃, em função do nível de carga aplicado são apresentados na figura 14.

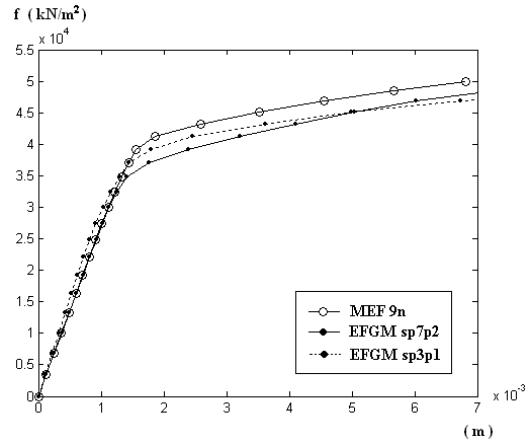


Fig 14 - Diagrama carga/deslocamento do centro do laminado encastrado

Apresentam-se de seguida na figura 15 os resultados referentes à tensão normal σ_{xx} e à tensão de corte τ_{xy} ao longo da secção AA' obtidos pelo EFGM sp7p2 e pelo MEF na face superior da camada superior do laminado.

Os resultados de ambos os métodos ajustam-se bastante bem não havendo diferenças significativas a referir.

4.5 - Laminados simplesmente apoiados

Considere-se o laminado genérico simplesmente apoiado em todo o contorno representado na figura 16.

São estudados três laminados distintos, com diferentes orientações por camada constituídas pelo mesmo material anisotrópico e com a mesma espessura. Todos os laminados têm uma espessura total $h = 0.01$ m. As propriedades materiais para a camada genérica admitindo os eixos materiais coincidentes com os eixos globais são:

$E_1 = 250 \times 10^6$ kPa	$E_{T1} = 250 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y1} = 200 \times 10^3$ kPa	$\nu_{12} = 0.25$
$E_2 = 10 \times 10^6$ kPa	$E_{T2} = 10 \times 10^3$ kPa	$\sigma_{Y2} = 200 \times 10^3$ kPa	$\nu_{12} = 0.01$
$G_{12} = 5 \times 10^6$ kPa	$G_{T12} = 5 \times 10^3$ kPa	$\tau_{Y12} = 115.47 \times 10^3$ kPa	
$G_{23} = 2 \times 10^6$ kPa	$G_{T23} = 2 \times 10^3$ kPa	$\tau_{Y23} = 115.47 \times 10^3$ kPa	
$G_{31} = 5 \times 10^6$ kPa	$G_{T31} = 5 \times 10^3$ kPa	$\tau_{Y31} = 115.47 \times 10^3$ kPa	
$E = E_1$	$E_T = E_{T1}$	$\sigma_Y = \sigma_{Y1}$	$\varphi = 45^\circ$

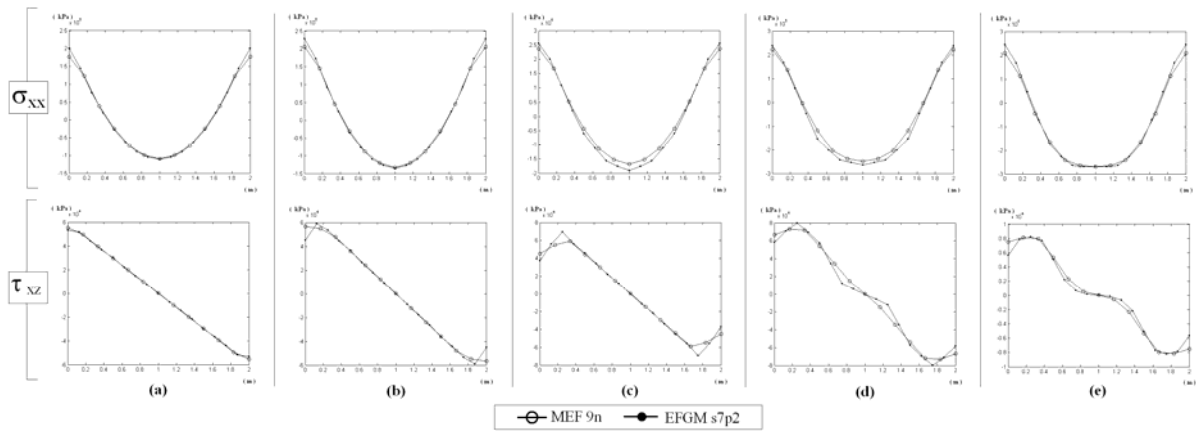


Fig 15 - Diagramas das tensões normais σ_{xx} e das tensões de corte τ_{xz} ao longo da secção AA' para (a) $f = 2.48 \times 10^4$ kN/m², (b) $f = 3.0 \times 10^4$ kN/m², (c) $f = 3.705 \times 10^4$ kN/m², (d) $f = 4.505 \times 10^4$ kN/m² e (e) $f = 5.0 \times 10^4$ kN/m²

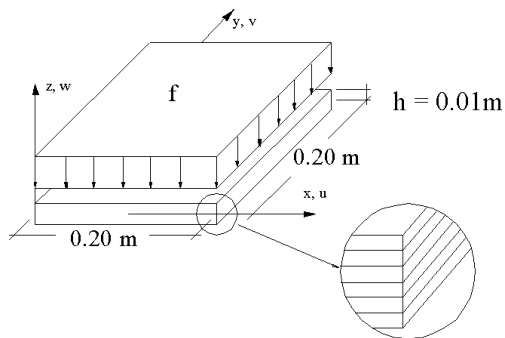


Fig 16 - (a) Representação geométrica do laminado.

É utilizada uma malha nodal regular de 17x17 nós na análise elasto-plástica pelo EFGM e pelo MEF. Os diagramas carga/deslocamento do centro do laminado para o laminado com uma camada com orientação de 0°, para o laminado com 3 camadas com orientações 0/90/0 e para o laminado com 5 camadas com orientações 0/90/0/90/0 são apresentados respectivamente na figura 17.

É visível o bom ajuste entre os resultados obtidos pelo EFGM e pelo MEF para os três laminados.

Procede-se à apresentação, na figura 18, da distribuição das tensões normais σ_{xx} , ao longo da espessura, no centro dos laminados, para crescentes níveis de carga. Como é visível existe uma concordância perfeita entre o EFGM e o MEF. Na figura 19 são apresentados os resultados obtidos, na face superior da primeira camada,

referentes às tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} no centro do laminado e os resultados referentes à tensão de corte τ_{xz} no ponto $(L;L/2)$ em função da carga aplicada.

Como se pode constatar os resultados obtidos pelo EFGM são similares aos obtidos com o MEF.

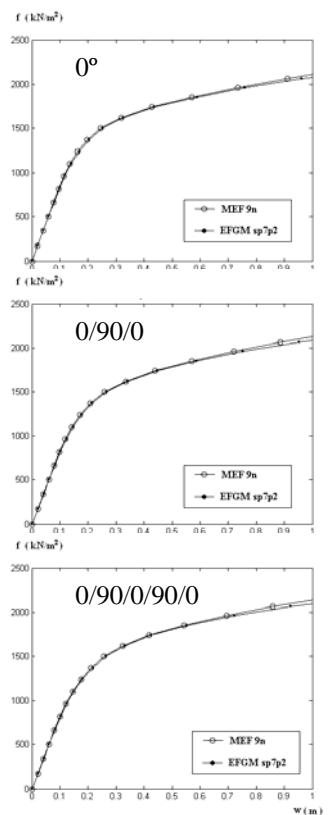


Fig 17 - Diagramas carga/deslocamento do centro do laminado para os diferentes laminados.

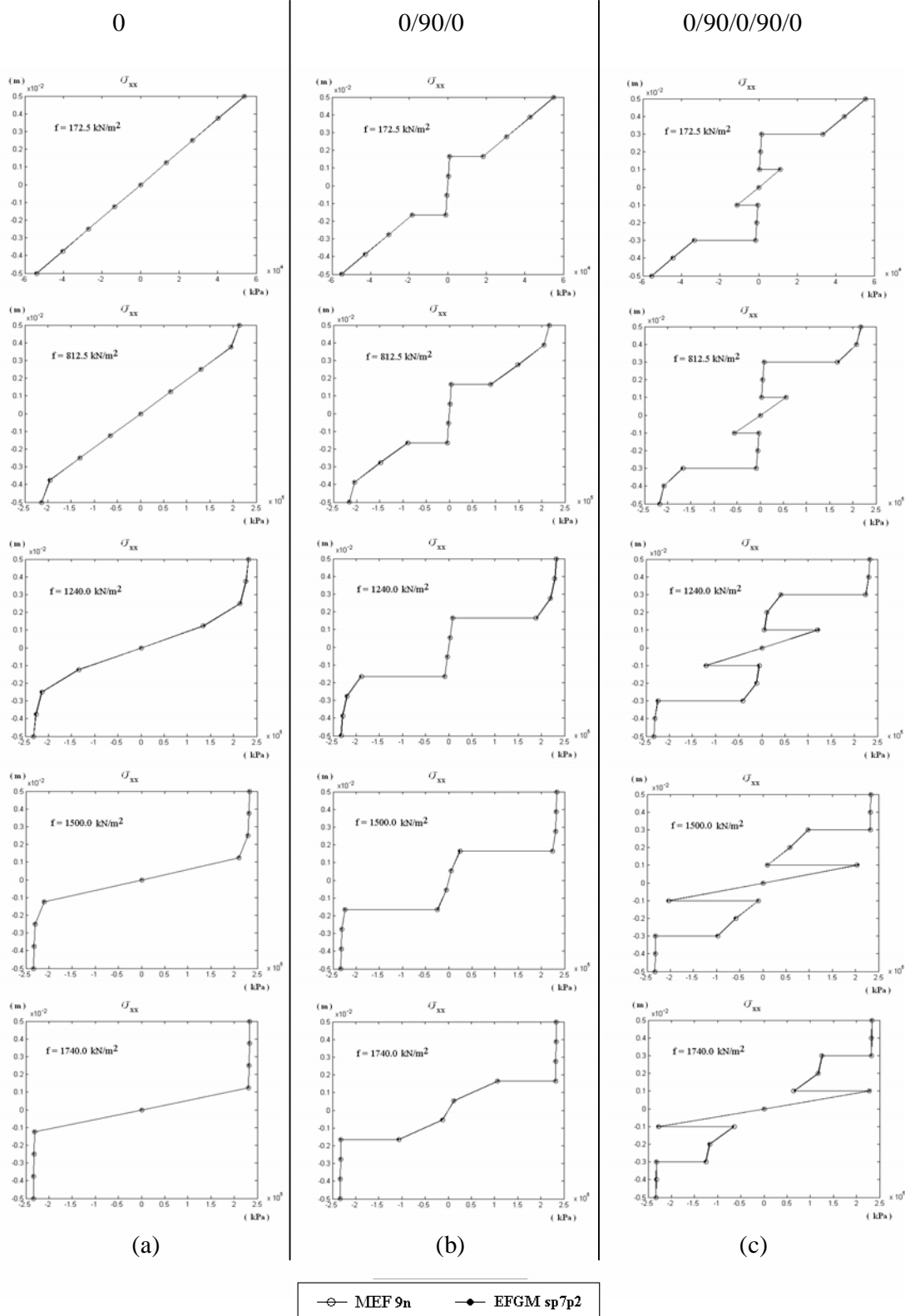


Fig 18 - Diagramas da tensão normal σ_{xx} ao longo da espessura no centro dos laminados para (a) $f = 172.5 \text{ kN/m}^2$. (b) $f = 812.5 \text{ kN/m}^2$. (c) $f = 1240.0 \text{ kN/m}^2$. (d) $f = 1500.0 \text{ kN/m}^2$ e (e) $f = 1740.0$

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho combinou-se o EFGM com um algoritmo elasto-plástico e os resultados obtidos para problemas 2D e

problemas de laminados, com anisotropia material, foram comparados com os obtidos com o MEF. Os resultados obtidos pelo EFGM são muito similares aos obtidos pelo MEF, tanto para o campo de

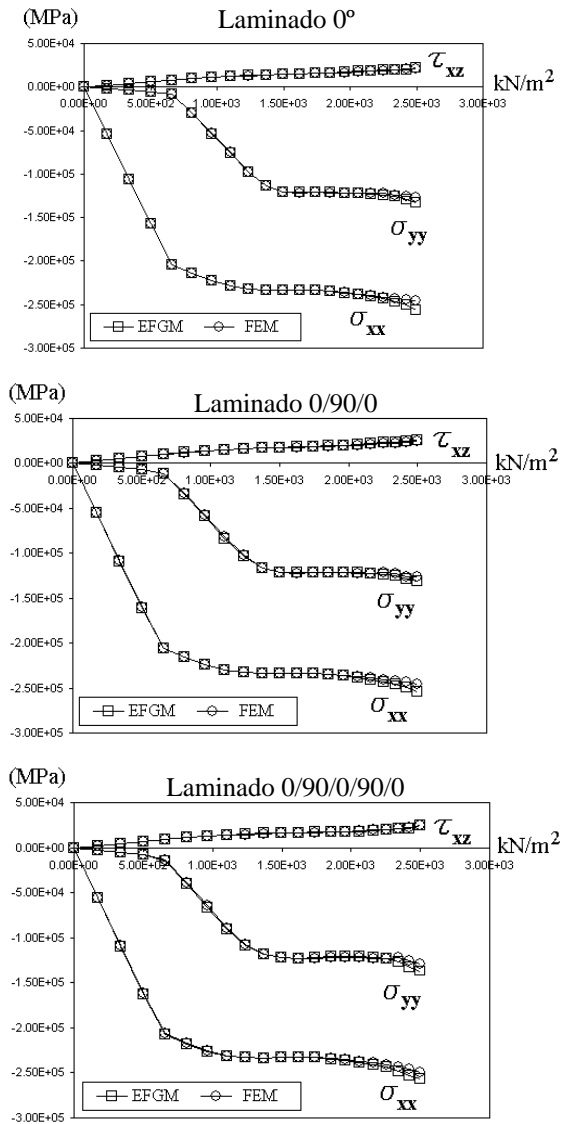


Fig 19 - Diagramas carga/tensão para o laminado a 0°, laminado a 0/90/0 e laminado 0/90/0/90/0.

deslocamentos como para o campo de tensões, o que mostra que o algoritmo de solução não-linear e o critério de cedência anisotrópico foram aplicados ao EFGM com sucesso.

Conclui-se desta forma que o EFGM é uma alternativa ao MEF na análise elasto-plástica de problemas anisotrópicos 2D e laminados.

REFERÊNCIAS

Barry, W., Saigal, S. (1999). "A three-dimensional element-free Galerkin elastic and elastoplastic formulation." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **vol. 46**: 671-693.

Belinha, J. (2004). *Análise Elasto-Plástica considerando o Método Livre de Elementos de Galerkin. Problemas Bidimensionais, Placas e Laminados*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto.

Belinha, J., Dinis, L.M.J.S. (2004). *Analysis of Laminates using the Element Free Galerkin Method*. Proceedings of The Seventh International Conference on Computational Structures Technology, B.H.V. Topping and C.A. Mota Soares, (Editors), Civil-Comp Press, Stirling, United Kingdom, paper 30, Lisboa 7-9 de Setembro de 2004.

Belytschko, T., Krysl, P. (1996). "Analysis of Thin Plates by the Element-Free Galerkin Method." *Computational Mechanics* **vol. 17**: 26-35.

Belytschko, T., Krysl, P. (1996). "Analysis of Thin Shells by the Element-Free Galerkin Method." *International Journal of Solids and Structures* **vol. 33**(22): 3057-3080.

Belytschko, T., Krysl, P. (1999). "The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks." *International Journal for Numeric Methods in Engineering* **vol.44**: 767-800.

Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994). "Element-Free Galerkin Method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **vol. 37**: 229-256.

Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1995). "Crack propagation by Element Free Galerkin Method." *Engineering Fracture Mechanics* **vol.95**: 295-315.

Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L., Tabbara, M. (1995). "Element Free Galerkin Method for static and dynamic fracture." *International Journal of Solid and Structures* **vol.32**: 2547-2570.

Belytschko, T., Sukumar, N., Moran, B., Black, T. (1997). "An element free Galerkin method for three dimensional fracture mechanics." *Computational Mechanics* **vol.20**: 170-175.

Belytschko, T., Tabbara, M. (1996). "Dynamic fracture using Element Free Galerkin Method." *International Journal for Numeric Methods in Engineering* **vol.39**: 923-938.

Dolbow, J., Belytschko, T. (1998). "An Introduction to Programming the Meshless Element Free Galerkin Method." *Archives in Computational Mechanics* **vol. 5**(3): 207-241.

- Donning, B., Liu, W.K. (1998). "Meshless Methods for Shear-deformable Beams and Plates." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **vol. 152**: 47-72.
- Hill, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Engineering Sciences Series, Oxford University Press, U.K.
- Kargarnovin, M. H., Toussi, H.E., Fariborz, S.J. (2003). "Elasto-plastic element-free Galerkin Method." *Computational Mechanics* **vol. 33**: 206 - 214.
- Liu, G. R., Yang, K.Y. (1998). A penalty method for enforce essential boundary conditions in element free Galerkin method. *Proc. 3rd HPC Asia'98*, Singapore, 1998.
- Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P. (1992). "Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements." *Computational mechanics* **vol.10**: 307-318.
- Nukulchai, W., Barry, W., Saranyasontorn, K., Bouillard, P.H. (2001). "On elimination of shear locking in the element-free Galerkin method." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **vol. 52**: 705-725.
- Owen, D., Hinton, E. (1980). *Finite Element in Plasticity*, Pineridge press: UK.
- Owen, D. R. J., Figueiras, J.A. (1983). "Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **vol.19**: 541-566.
- Owen, D. R. J., Figueiras, J.A. (1983). "Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element." *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **vol.19**: 521-539.
- Xu, Y., Saigal, S. (1998). "An element-free Galerkin formulation for stable crack growth in an elastic solid." *International Journal of Solid and Structures* **vol.36**: 1045-1079.
- Zienkiewicz, O. C. (1989). *The Finite Element Method*, McGraw-Hill.