

# ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL DO MÉTODO DO VÃO VARIÁVEL PARA A IDENTIFICAÇÃO DAS PROPRIEDADES ELÁSTICAS DA MADEIRA

J. Xavier<sup>1</sup>, N. Garrido<sup>2</sup>, J. Morais<sup>1</sup>, J. Pinto<sup>1</sup>, P. Camanho<sup>3</sup>

<sup>1</sup>CETAV/UTAD, Departamento de Engenharias, Quinta de Prados, 5000 – 911 Vila Real, Portugal.

<sup>2</sup>ESTV, Departamento de Engenharia de Madeiras, Campus Politécnico, Repeses, 3500 Viseu, Portugal.

<sup>3</sup>FEUP, DEMEGI, Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal.

## RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma análise por elementos finitos e um estudo experimental sobre o Método do Vão Variável (MVV) para a identificação do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_L$ ) e do módulo de corte ( $G_{LR}$ ) da madeira. Os ensaios de flexão em três pontos foram executados segundo a norma EN 408 (2002). Os resultados numéricos mostram que  $E_L$  e  $G_{LR}$  dependem da definição de flecha, em virtude de não serem válidas as hipóteses cinemáticas da teoria de Timoshenko, na qual se baseia o MVV. Os resultados experimentais revelam que o MVV, quando se considera como flecha o deslocamento do ponto de aplicação da carga, é adequado para a medição de  $E_L$ , mas não para a medição de  $G_{LR}$ .

## 1 - INTRODUÇÃO

A madeira é um material ortotrópico, com três direcções de simetria material: a direcção longitudinal (L) dos traqueídeos, a direcção radial (R) dos raios lenhosos e a direcção tangencial (T) aos anéis de crescimento. Para caracterizar o comportamento mecânico da madeira é pois necessário conhecer as relações tensão - deformação no referencial LRT.

Algumas normas (ASTM D 198, 1994; EN 408, 2002) contemplam a utilização do ensaio de flexão em três pontos para a determinação simultânea do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_L$ ) e do módulo de corte ( $G_{LR}$  ou  $G_{LT}$ ) da madeira. Para o efeito, baseiam-se na teoria de vigas de Timoshenko e num procedimento experimental conhecido por Método do Vão Variável (MVV).

Yoshihara *et al.* (1998) aplicaram o MVV em três espécies de resinosas e folhosas. A fim de validar os resultados obtidos através desse método, os referidos autores recorreram a ensaios de vibrações livres de flexão. No que diz respeito a  $E_L$ , os autores obtiveram valores semelhantes nos dois ensaios. Por sua vez, o valor de  $G_{LR}$  identificado pelo MVV é quase uma ordem de grandeza inferior ao que é obtido nos ensaios dinâmicos, para todas as espécies testadas.

No mesmo trabalho, Yoshihara *et al.* (1998) apresentam uma análise bidimensional por elementos finitos do ensaio de flexão em três pontos, no domínio linear. Com base nos resultados obtidos os autores propuseram uma modificação no MVV, que consiste em substituir o factor de corte clássico da teoria de Timoshenko por um factor que é uma

função linear do vão e apenas acessível pelo método dos elementos finitos.

Brancheriau *et al.* (2002) demonstraram, pela via analítica e experimental, que a indentação dos provetes nos apoios e no ponto de aplicação da carga tem um efeito na flecha semelhante ao do esforço transversal. Com base nesse trabalho, esses autores propuseram uma expressão analítica que permite converter o módulo de elasticidade aparente da madeira obtido pelo ensaio de flexão em três pontos da norma NF B51-008 (1942), no módulo de elasticidade determinado com o ensaio de flexão em quatro pontos da norma NF B51-016 (1985).

Este artigo pretende dar uma contribuição para avaliar a aplicabilidade do MVV para a medição simultânea de  $E_L$  e de  $G_{LR}$  da madeira. Para o efeito foi realizado um trabalho experimental, com provetes da madeira de *Pinus pinaster* Ait. Além disso, foi efectuada uma análise tridimensional por elementos finitos, considerando a madeira como um material linear elástico, e incluindo o contacto entre o provete e os apoios.

## 2 - MÉTODO DO VÃO VARIÁVEL

O ensaio de flexão em três pontos (Figura 1) é um ensaio normalizado para a determinação do módulo de elasticidade longitudinal da madeira, usando para o efeito a seguinte expressão fornecida pela teoria das vigas de Euler-Bernoulli:

$$E_L^a = \frac{1}{4b} \left( \frac{L}{h} \right)^3 \frac{F}{f}. \quad (1)$$

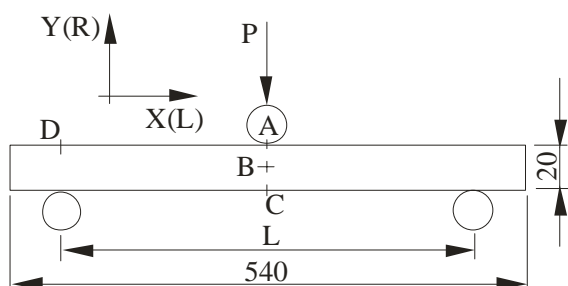


Fig 1 - Ensaio de flexão em três pontos.

Nesta equação,  $h$  e  $b$  são as dimensões da secção transversal do provete,  $L$  é a distância entre apoios, e  $F/f$  representa o declive inicial da curva força/flecha. Contudo, o módulo de elasticidade determinado de acordo com a Equação (1) representa um valor aparente do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_L^a$ ), dependente da relação  $L/h$ , que converge para o verdadeiro valor de  $E_L$  quando  $L/h$  aumenta.

A variação de  $E_L^a$  com  $L/h$  deve-se ao efeito do esforço de corte, que a teoria de Euler-Bernoulli não contempla. A teoria das vigas de Timoshenko inclui esses efeitos, assumindo que a flecha de uma viga tem uma componente provocada pelo momento flector e outra pelo esforço de corte (Timoshenko e Gere, 1994). Esta teoria é a base das normas ASTM D198 (1994) e EN 408 (2002), para a determinação simultânea do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_L$ ) e do módulo de corte ( $G_{LR}$  ou  $G_{LT}$ ) da madeira, através do MVV. Este método baseia-se na seguinte equação:

$$\frac{1}{E_L^a} = \frac{1}{E_L} + \frac{1}{G_{L(R \text{ ou } T)}} k \left( \frac{h}{L} \right)^2. \quad (2)$$

em que  $E_L$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $E_L^a$  é o módulo de elasticidade aparente (Equação 1),  $G$  é o módulo de corte para o plano de flexão ( $LR$  ou  $LT$ ),  $h$  é a altura do provete,  $L$  é a distância entre apoios e  $k$  é o coeficiente de corte ( $k = 1.2$ ).

No Método de Vão Variável (ASTM D198, 1994; EN 408, 2002) o mesmo provete é ensaiado para diferentes valores do vão, escolhidos de forma a se obterem incrementos de  $(h/L)^2$  aproximadamente iguais. Os sucessivos ensaios de flexão devem ser executados dentro do domínio de comportamento linear e elástico. Para cada uma das relações  $h/L$ , é determinado o módulo de elasticidade aparente (Equação 1). Por regressão linear dos pontos experimentais  $1/E_L^a - k(h/L)^2$  é obtida em seguida uma recta,

cuja intersecção com o eixo das ordenadas representa o inverso de  $E_L$ , enquanto que o declive representa o inverso de  $G$  (Equação 2).

### 3 - TRABALHO EXPERIMENTAL

A madeira utilizada neste ensaio foi obtida a partir de uma árvore de *Pinus pinaster* proveniente de um plantio com cerca de 74 anos de idade, localizado em Orgens, no distrito de Viseu. Após a sua manufactura, os provetes foram colocados no laboratório de ensaios durante alguns dias, até ficarem em equilíbrio com as condições higrotérmicas existentes no laboratório (EN 408, 2002).

Os ensaios de flexão foram efectuados de acordo com a norma europeia EN 408 (2002), em onze provetes com as dimensões nominais de  $540 \times 20 \times 20 \text{ mm}^3$  (Figura 1). Todos os ensaios foram conduzidos numa máquina universal de ensaios mecânicos INSTRON 1125, tendo sido instrumentados com uma célula de carga de 5kN.

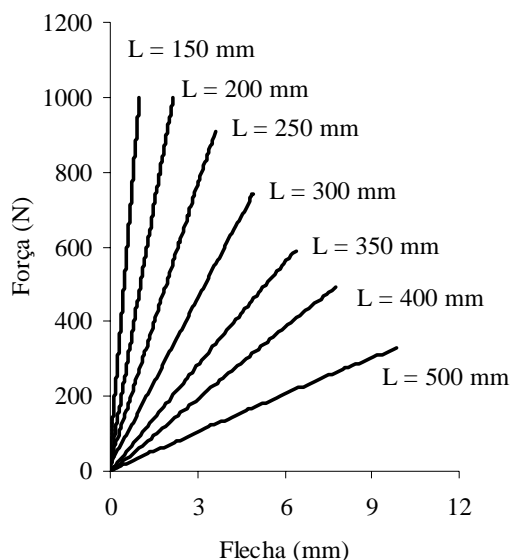


Fig 2 - Curvas força-flecha.

As grandezas experimentais consideradas foram a força medida pela célula de carga e o deslocamento do travessão da máquina de ensaios. A força e o deslocamento foram registados ao longo de cada ensaio pelo sistema de aquisição de dados incorporado na máquina de ensaios. Na Figura 2 ilustram-se os resultados directamente obtidos através dos ensaios executados.

### 4 - MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Recorrendo ao código comercial ABAQUS<sup>®</sup>, foi elaborado um modelo 3D de elementos finitos do ensaio de flexão em três pontos, considerando os provetes com as dimensões indicadas na Figura 1 e com diferentes comprimentos de vão (entre 120 e 700 mm). Atendendo à simetria (geométrica, material e de solitação) do problema, apenas um quarto do provete foi modelado. A malha adoptada contém 10176 elementos C3D8, com 8 nós e 16 graus de liberdade (Figura 3).

No modelo numérico que foi elaborado contemplou-se o contacto provete/cabeçote móvel e provete/apoios, com atrito (Figura 3). O cabeçote e os apoios foram modelados como superfícies rígidas, e os deslocamentos prescritos impostos nos seus nós de referência. O nó de referência associado ao apoio foi encastrado, e todos os graus de liberdade do nó de referência associado ao cabeçote móvel foram prescritos a zero, excepto o deslocamento vertical  $\delta$ , para o qual se atribuiu o valor de  $-0.5 \text{ mm}$  (Figura 3).

A madeira foi modelada como sendo um material contínuo, homogéneo, ortotrópico e com um comportamento linear elástico. As propriedades mecânicas da madeira que foram introduzidas no modelo numérico encontram-se na Tabela 1.

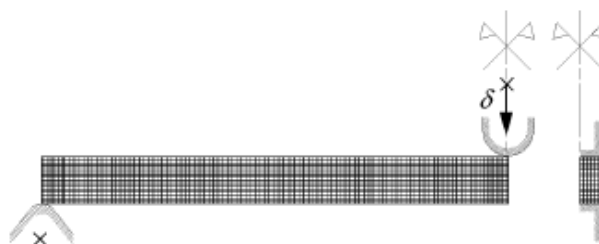


Fig 3 - Malha de elementos finitos.

**Tabela 1** - Propriedades mecânicas adoptadas no modelo numérico.

$E_L$ (GPa) <sup>(1)</sup>	15,13
$E_R$ (GPa) <sup>(1)</sup>	1,91
$E_T$ (GPa) <sup>(1)</sup>	1,01
$\nu_{LR}$ <sup>(1)</sup>	0,47
$\nu_{TL}$ <sup>(1)</sup>	0,05
$\nu_{RT}$ <sup>(1)</sup>	0,59
$G_{LR}$ (GPa) <sup>(2)</sup>	1,11
$G_{LT}$ (GPa) <sup>(2)</sup>	1,10
$G_{RT}$ (GPa) <sup>(2)</sup>	0,18

<sup>(1)</sup> *Pinus pinaster* Ait. (Pereira, 2005)

<sup>(2)</sup> *Pinus taeda* L. (FPL, 1999)

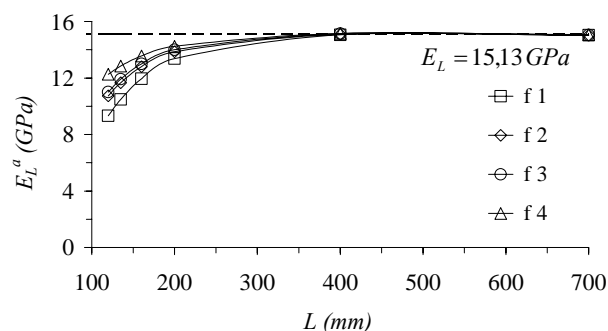
### 5 - ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

De acordo com as normas (ASTM D198, 1994; EN 408, 2002) e os procedimentos usados nalguns trabalhos (Yoshiara *et al.*, 1998; Garrido, 2003), foram consideradas as seguintes definições da flecha:  $f_1 = v_A$ ,  $f_2 = v_B$ ,  $f_3 = v_C$  e  $f_4 = v_C - v_D$ , sendo  $v$  a componente do deslocamento segundo o eixo  $yy$ , e A, B, C e D os pontos assinalados na Figura 1.

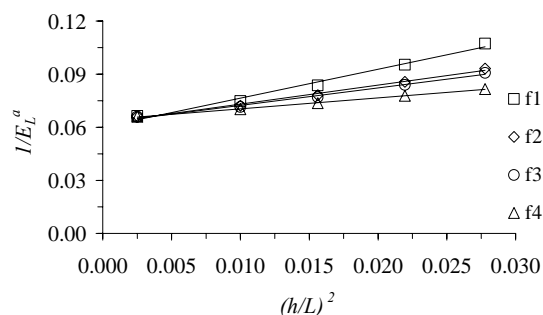
Como se pode observar na Figura 4, o valor de  $E_L^a$  (Equação 1) varia em função da definição usada para  $f$ , convergindo porém para o valor de referência ( $E_L=15,13$  GPa) para comprimentos de vão suficientemente elevados ( $L/h \geq 20$ ).

Para efeitos de aplicação do MVV, obtiveram-se as relações características  $E_L^a - h^2/L^2$  (Figura 5). A partir delas determinaram-se os valores aparentes de  $E_L$  e de  $G_{LR}$ , de acordo com a Equação 2. Na Tabela 2 apresentamos os resultados assim obtidos, sendo os valores entre parêntesis o erro relativo aos valores de referência que foram considerados no modelo numérico (Tabela 1).

A primeira conclusão que se retira dos resultados que constam na Figura 5 e na Tabela 2 é o facto do MVV fornecer o verdadeiro valor de  $E_L$  quando se toma co-



**Fig 4** - Variação do módulo de elasticidade longitudinal aparente com o vão.



**Fig 5** - Rectas características do MVV.

**Tabela 2** - Valores de  $E_L$  e  $G_{LR}$  identificados por simulação do MVV.

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
$E_L$ (GPa)	16.63	16.05	16.01	15.57
	(9.9%)	(6.1%)	(5.8%)	(2.9%)
$G_{LR}$ (GPa)	0.74	1.12	1.22	1.94
	(33.6%)	(0.6%)	(9.6%)	(74.6%)

mo flecha a diferença dos deslocamentos verticais dos pontos C e D (Figura 1). Outra conclusão é que o referido método fornece o valor correcto do módulo de corte quando se considera como flecha o deslocamento vertical do ponto B (Figura 1).

À semelhança do que fez Yoshiara *et al.* (1998), uma vez conhecidos os valores de  $E_L$  e  $G_{LR}$  (Tabela 1), recorreremos à Equação 2 para calcular  $k$ :

$$k = \frac{G_{LR}}{(h/L)^2} \left( \frac{1}{E_L^a} - \frac{1}{E_L} \right). \quad (3)$$

Segundo a teoria de Timoshenko, o factor de corte  $k$  é um parâmetro constante que contempla a distribuição não uniforme das tensões de corte na secção transversal.

Como se pode constatar na Figura 6,  $k$  varia com a relação  $h/L$ , de forma aproximadamente linear, embora não seja igual a 1.2 quando  $h/L = 0$ , conforme concluíram Yoshiara *et al.* (1998).

Para explicar a dependência de  $E_L$  e  $G_{LR}$  com a definição de flecha, assim como o facto de  $k$  não ser uma constante, analisou-se a validade das hipóteses cinemáticas da teoria de Timoshenko, bem como a importância dos efeitos de Saint-Venant. Na Figura 7 apresentam-se os perfis dos deslocamentos  $v$ , normalizados pelo deslocamento imposto ( $\delta = -0.5$  mm), ao longo do segmento de recta  $AC$  (Figura 1). Os referidos deslocamentos são praticamente iguais quando  $L = 400$  mm. Mas à medida que o vão diminui, os deslocamentos ao longo de  $AC$  variam de forma mais acentuada, sendo cada vez maior a diferença  $v_C - v_A$  (com  $v_A = \delta$ ). Estes resultados mostram claramente a existência de indentação, na secção transversal do provete a meio vão, que não é contemplada nas hipóteses cinemáticas da teoria das vigas de Timoshenko.

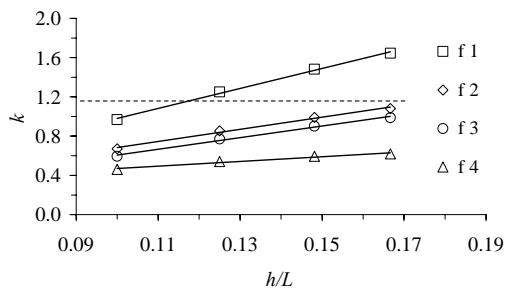


Fig 6 - Dependência do factor de corte  $k$  com a relação  $h/L$ .

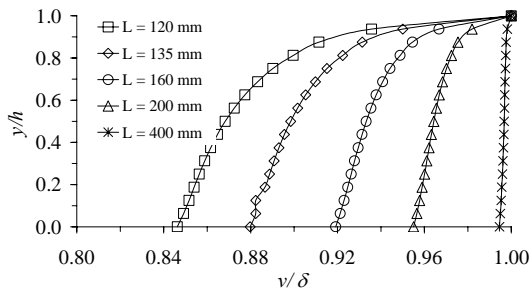


Fig 7 - Deslocamentos  $v$  ao longo da linha  $AC$ .

A Figura 8 ilustra a distribuição das tensões ao longo de  $AC$ , normalizadas por

$\sigma_L^{\max}$ . O perfil das tensões  $\sigma_L$  (Figura 8a) é distinto do perfil linear previsto pela teoria das vigas de Timoshenko, sendo essa discrepância tanto mais acentuada quanto mais pequeno for o vão. No troço  $BC$  a distribuição das tensões  $\sigma_L$  é relativamente insensível ao comprimento de vão e próxima da solução da teoria de Timoshenko.

A tensão normal  $\sigma_R$  (Figura 8b) é praticamente nula ao longo  $BC$ , existindo um efeito de concentração de tensões na vizinhança do ponto de aplicação da carga. Para os menores comprimentos de vão,  $\sigma_R$  torna-se da mesma ordem de grandeza que  $\sigma_L^{\max}$ . Refira-se que a teoria das vigas de Timoshenko prevê que  $\sigma_R$  seja nula em qualquer ponto da viga.

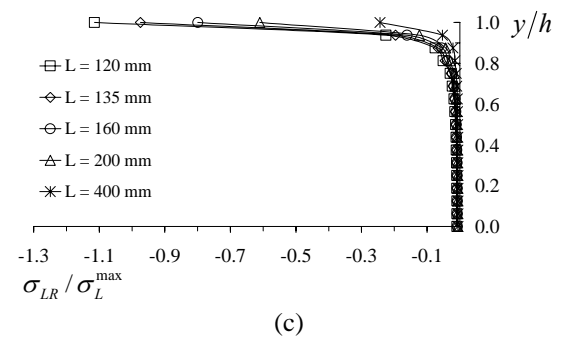
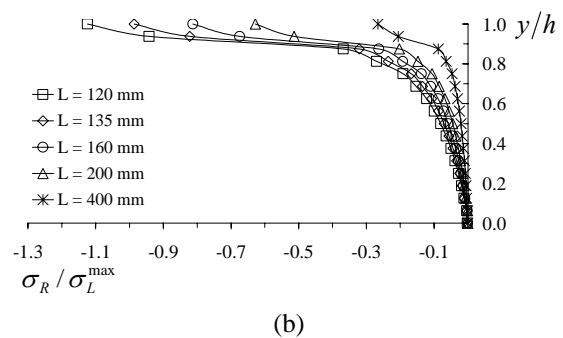
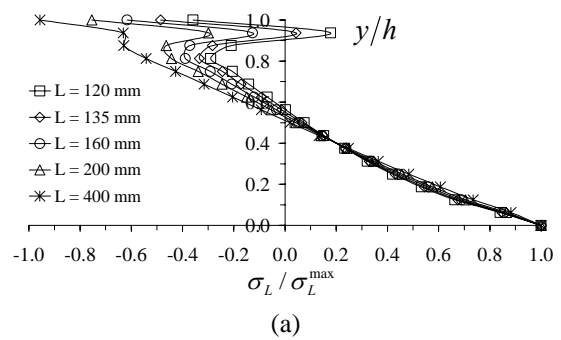


Fig 8 - Distribuição das tensões ao longo de  $AC$ : (a)  $\sigma_L$ , (b)  $\sigma_R$  e (c)  $\sigma_{LR}$ .

Em relação à tensão de corte ( $\sigma_{LR}$ ), o seu valor é praticamente nulo, excepto na região de aplicação da carga, onde se observa um efeito de concentração de tensões que é sobretudo significativo para os menores comprimentos de vão, para os quais  $\sigma_{LR}$  é da mesma ordem de grandeza de  $\sigma_L^{\max}$  (Figura 8c). A distribuição destas tensões de corte é muito distinta da distribuição prevista pela teoria de Timoshenko (Timoshenko e Gere, 1994).

Face ao que acabamos de expor, conclui-se que a teoria das vigas de Timoshenko não é válida para a determinação do estado de tensão nos pontos da linha AC. Tal conclusão deve-se ao facto da madeira de *Pinus pinaster* ter um baixo módulo de elasticidade radial ( $E_R$ ) e desses pontos estarem próximos do ponto de aplicação da carga. Neste domínio (AC) não é pois aplicável o princípio de Saint-Venant.

## 6 - ANÁLISE DOS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

A partir da informação experimental, determinou-se o módulo de elasticidade aparente ( $E_L^a$ ), usando a teoria das vigas de Euler-Bernoulli (Equação 1). Os resultados obtidos encontram-se na Figura 9, em conjunto com os resultados numéricos. Conforme se pode observar,  $E_L^a$  é função comprimento do vão, pelo que não é uma propriedade intrínseca do material, mas sim um parâmetro de ensaio. A Tabela 4 mostra os valores médios e os coeficientes de variação de  $E_L^a$ , para cada um dos vãos.

A partir dos valores de  $E_L^a$  da Figura 9, obtiveram-se as relações  $1/E_L^a - k(h/L)^2$ , para cada um dos provetes ensaiados (Figura 10). Constatou-se que essas relações são lineares apenas para os vãos compreendidos entre 300 e 500 mm. A partir da equação da recta característica correspondente determinou-se  $E_L$  e  $G_{LR}$  (Tabela 4).

O valor de  $E_L$  identificado através do MVV (Tabela 4) é praticamente coinci-

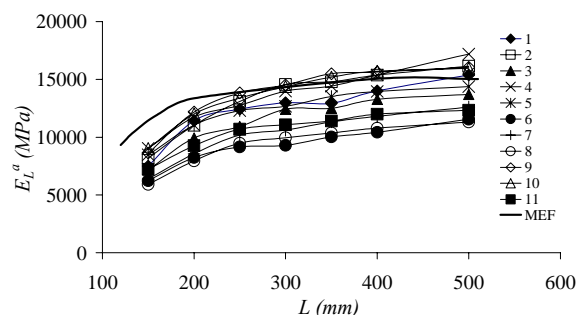


Fig 9 - Evolução do módulo de elasticidade longitudinal aparente com o vão, determinada experimentalmente.

Tabela 3 - Valores médios de  $E_L^a$ .

L (mm)	$E_L^a$ (GPa)	CV (%)
150	7.62	14.8
200	10.31	15.3
250	11.65	14.0
300	12.41	15.4
350	12.91	15.1
400	13.49	14.7
500	14.24	14.3

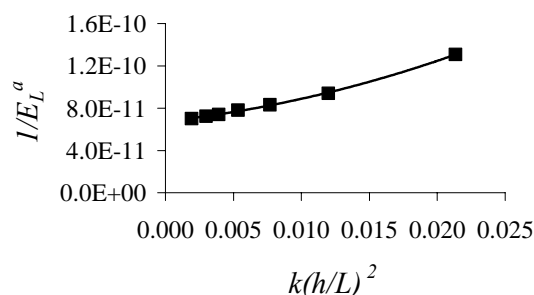


Fig 10 - Curva experimental característica do MVV.

Tabela 4 - Valores médios de  $E_L$  e  $G_{LR}$  para a madeira de *Pinus pinaster*, identificados experimentalmente.

	MVV	Tracção	Iosipescu
$E_L$ (GPa)	14.57	15.13	—
C.V (%)	16.7	15.3	—
$G_{LR}$ (GPa)	0.48	—	1.41
C.V (%)	16.7	—	10.3

dente com o valor médio de  $E_L^a$  para o vão de 500 mm (Tabela 3). Além disso, o MVV conduz a um valor de  $E_L$  que é aproximadamente 4% inferior ao valor obtido por Pereira (2004), através do

ensaio de tracção em provetes gémeos dos ensaiados neste trabalho (Tabela 4). Conclui-se assim que o MVV conduz a uma estimativa fidedigna do módulo de elasticidade longitudinal tendo em conta a variabilidade natural da madeira.

Quanto ao módulo de corte  $G_{LR}$ , o valor médio identificado através do MVV é praticamente uma ordem de grandeza inferior ao que foi determinado por Xavier (2003), usando o ensaio de Iosipescu em provetes gémeos dos ensaiados no presente trabalho.

## 7 – CONCLUSÕES

No caso da madeira de *Pinus pinaster*, a teoria das vigas de Euler-Bernoulli é válida para relações  $h/L \geq 20$ , pelo que o valor de  $E_L$  para essa espécie pode ser identificado através do ensaio de flexão em três pontos.

De acordo com os resultados da simulação por elementos finitos, para relações  $h/L \leq 20$  obtém-se uma dependência linear entre  $E_L^a$  e  $k(h/L)^2$ , tal como previsto pela teoria de vigas de Timoshenko. Essa relação depende porém da definição de flecha que é adoptada, e portanto os valores de  $E_L$  e de  $G_{LR}$  determinados pelo Método de Vão Variável dependem também dessa definição.

Quer os resultados numéricos quer os resultados experimentais, mostram que o Método do Vão Variável não é adequado para a identificação do módulo de corte  $G_{LR}$  da madeira de *Pinus pinaster*, quando se considera a flecha como sendo o deslocamento do ponto de aplicação da carga. O valor médio de  $G_{LR}$  que foi obtido experimentalmente é uma ordem de grandeza inferior ao que foi determinado a partir do ensaio de Iosipescu (Xavier, 2003).

Dos pontos anteriores conclui-se que o Método de Vão Variável proposto na norma EN 408 (2002), baseado no ensaio de flexão em três pontos e na teoria das vigas de Timoshenko, não é um ensaio fundamental que permita a simultânea e correcta identificação do módulo de elasticidade longitudinal ( $E_L$ ) e do módulo de corte ( $G_{LR}$ ) da madeira de *Pinus pinaster*.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação para a Ciência e a Tecnologia o apoio financeiro concedido através do projecto POCTI/EME/36270/2000.

## REFERÊNCIAS

- ASTM D198-94. Standard methods of static tests of lumber in structural sizes. American Society for Testing and Materials, Philadelphia, PA, USA, 1994.
- Brancheriau L., H. Bailleres e D. Guitard. Comparison between modulus of elasticity values calculated using 3 and 4 point bending tests on wooden samples. Wood Science and Technology, 36:367-383, 2002.
- EN 408. Structural timber and glued laminated timber - Determination of some physical and mechanical properties. European Committee for Standardization, 2002.
- FPL. Wood Handbook. Technical Report FPL-GTR-113, U.S. Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory, 1999.
- Garrido, N. Identificação do comportamento mecânico da madeira através do ensaio de tracção fora dos eixos de simetria material. Dissertação de Mestrado, UTAD, Portugal, Vila Real, 2003.
- NF B51-008. Bois. Essai de flexion statique. AFNOR, 1942.
- NF B 51-016. Bois. Essai de flexion statique. Détermination du module d'élasticité flexion statique de petites éprouvettes sans défaut. AFNOR, 1987.
- Pereira, J.L. Comportamento mecânico da madeira em tracção nas direcções de simetria material. Dissertação de Mestrado, UTAD, Vila Real, 2004.
- Timoshenko, Gere. Mecânica dos sólidos. Livros Técnicos e Científicos Editora, 1994.
- Xavier, J.C. Caracterização do comportamento ao corte da madeira usando o ensaio de Iosipescu. Dissertação de Mestrado, UTAD, Vila Real, 2003.
- Yoshihara H., Y. Kubojima, K. Nagaoka e M. Ohta. Measurement of the shear modulus of wood by static bending tests. Journal of Wood Science, 44:15-20, 1998.