

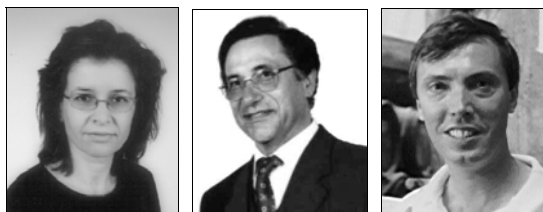
# DESENVOLVIMENTO DE NOVOS MODELOS PARA A ANÁLISE DE TENSÕES E DE DEFORMAÇÕES EM ESTRUTURAS TUBULARES

Elza M. M. Fonseca<sup>1</sup>, Francisco Q. Melo<sup>2</sup>, Carlos A. M. Oliveira<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Mecânica Aplicada, Instituto Politécnico de Bragança

<sup>2</sup> Secção Autónoma de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro

<sup>3</sup> Depto. de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



## RESUMO

*Neste artigo apresentam-se vários modelos numéricos para análise de estruturas tubulares, como uma alternativa aos elementos finitos de casca tradicionalmente utilizados em tais aplicações. Os modelos baseiam-se em diferentes campos de deslocamentos, sendo sumariamente apresentadas as formulações necessárias à sua definição. Mostram-se alguns casos de aplicação em estudo utilizando os modelos desenvolvidos e resultados comparativos experimentais.*

## 1 - INTRODUÇÃO

As estruturas tubulares têm elevada importância tecnológica em aplicações abrangendo variados campos, como é o caso do transporte de fluidos para assegurar conforto nas comunidades (água e aquecimento), produção de energia e processos químicos. As aplicações avançadas como a produção de energia nuclear, a indústria aeronáutica e aeroespacial, estão sujeitas a elevados padrões de segurança impostos tanto na fase do projecto, como na das inspecções a efectuar a este tipo de estruturas. Não só a melhoria no desenho e as soluções construtivas para os componentes de estruturas de tubagens têm contribuído para os progressos verificados no projecto; com efeito, o desenvolvimento de materiais capazes de suportar as mais severas condições de serviço tem importante implicação não só na a redução do custo total do projecto (por economia de peso global, uma vez que a rigidez estrutural seja melhorada) mas também no aumento da segurança e fiabilidade.

A ligação entre os vários componentes de uma tubagem (elementos rectos, curvos, flanges, reservatórios), as adversidades a que estão sujeitos, as altas temperaturas, os carregamentos diversos, o ambiente de exposição, o próprio transporte e a instalação de tubagens, traduz-se numa complexidade para o cálculo do campo de tensões e deformações podendo originar os mais variados problemas. Áreas distintas de actuação como a mecânica dos materiais, a mecânica da fractura, análise de vibrações, entre outras, poderão de alguma forma contribuir para a minimização atempada de algumas ocorrências. A figura 1 representa algumas destas aplicações industriais, de estruturas deste tipo.

Muitos são os autores com relevantes contribuições que se destacam no estudo de acessórios curvos utilizando técnicas analíticas e experimentais, entre outros, [Theodore von Kármán (1911)], [Vigness (1943)], [Cheng e Thailer (1970)] e mais tarde [Thomson (1980)]. Recentemente, novas contribuições utilizando técnicas numéricas, tornaram possíveis estudos mais complexos neste tipo de geometrias,

consideradas como elementos de casca fina e com os problemas decorrentes da ovalização e empenamento quando as estruturas são solicitadas. Salienta-se [Bathe e Almeida (1982)], [Wilczek (1984)], [Melo (1992-1997)] e mais recentemente [Fonseca (2002-2005)].



Fig. 1 - Aplicações industriais de sistemas tubulares.

## 2 - NOVOS MODELOS NUMÉRICOS E MOTIVAÇÃO

Este trabalho representa um conjunto de formulações alternativas na análise e na obtenção de campos de tensão e de deformação em estruturas tubulares consideradas de espessura fina.

Desenvolveram-se elementos finitos baseados na modelação unidimensional de sistemas tubulares, utilizando um campo de deslocamentos resultado da combinação de graus de liberdade para um elemento de viga indeformável e graus de liberdade na capacidade de distorção da secção tubular. Os elementos considerados apresentam duas secções nodais.

São apresentados vários modelos alternativos, com base em diferentes campos de deslocamentos. Utilizam-se polinómios de ordem diferente ou funções trigonométricas, para a modelação dos deslocamentos nos termos de viga indeformável. Estes deslocamentos são combinados com uma solução de termos da série de Fourier, permitindo assim o cálculo de tensões ou deslocamentos na superfície média da casca do elemento tubular.

Os modelos apresentados são denominados da seguinte forma: modelo 5P (utiliza um polinómio de 5ª ordem e desenvolvimento da série de Fourier), modelo 3P (com um polinómio de 3ª ordem e série de Fourier), modelo 1P (polinómio de 1ª ordem e série de Fourier) e um dos mais recentes modelos TF (utiliza funções

trigonométricas e desenvolvimento em série de Fourier), conforme a figura 2, e ainda outro recente elemento *Ring* (que utiliza só funções trigonométricas), como se representa na figura 3.

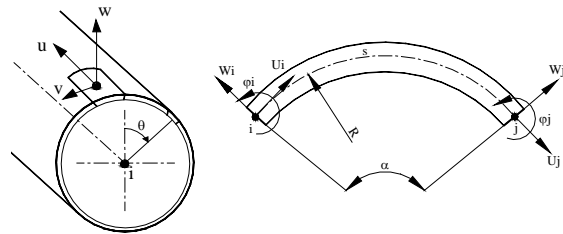


Fig. 2 - Geometria do elemento tubular de 2 nós, para os modelos: 5P, 1P, 3P e TF. Elementos com 19 graus de liberdade por secção.

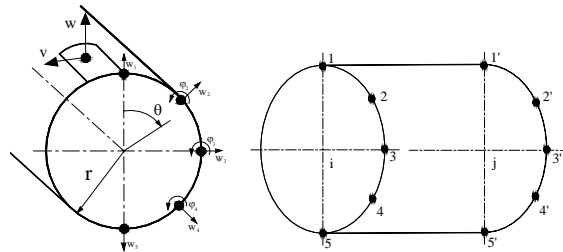


Fig. 3 - Geometria do elemento *Ring* com 5 nós e um total de 8 graus de liberdade por secção.

A motivação associada à utilização destes novos elementos traduz-se num elevado desempenho computacional no que respeita à facilidade da geração de malhas por serem unidimensionais, na simulação das condições de fronteira aplicáveis e na necessidade de malhas pouco refinadas. Tornam possível a determinação de campos de deslocamentos ao longo de uma linha média do elemento e sobre a superfície de uma casca desses elementos. Possibilitam o cálculo de tensões de membrana em qualquer secção recta da estrutura, permitindo ainda verificar os fenómenos de ovalização e empenamento decorrentes em estruturas desta natureza. Estes elementos permitem de uma forma fácil obter resultados comparáveis com outros elementos finitos mais dispendiosos, como é exemplo, os elementos de casca.

A utilização de diferentes polinómios ou funções trigonométricas, na obtenção de campos de deslocamentos destes elementos, traduz-se numa abordagem completa e detalhada de múltiplas e variadas opções

disponíveis ao utilizador, como alternativa, na análise de estruturas tubulares.

### 3 - FORMULAÇÃO

O modelo de deformação utilizado para os modelos 5P, 1P, 3P e TF é relativo a deformações de membrana e a variações de curvatura, conforme referido por [Melo (1992-1997)], [Flügge (1973)], [Kitching (1970)] e [Fonseca (2002-2005)]:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{\sin \theta}{R} & \frac{\cos \theta}{R} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1)$$

onde  $\varepsilon_{ss}$  é a deformação longitudinal de membrana,  $\gamma_{s\theta}$  a deformação de corte e  $\chi_{\theta\theta}$  a curvatura meridional associada à ovalização.

Para a formulação 5P, a função utilizada para  $U$  está de acordo com a expressão polinomial seguinte, [Fonseca (2002-2005)]. Os deslocamentos  $W$  e  $\varphi$  são obtidos por derivação sucessiva.

$$\begin{aligned} U_{(s)} &= a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 \\ W_{(s)} &= -\frac{dU}{ds} R = \\ &= -R(a_1 + 2a_2s + 3a_3s^2 + 4a_4s^3 + 5a_5s^4) \\ \varphi_{(s)} &= \frac{dW}{ds} = \\ &= -R(2a_2 + 6a_3s + 12a_4s^2 + 20a_5s^3) \end{aligned} \quad (2)$$

Com base nas condições de fronteira aplicáveis obtêm-se um conjunto de funções de forma:

$$\begin{aligned} U_{(s)} &= \left( (U_i N_{ui} + U_j N_{uj}) + (W_i N_{wi} + W_j N_{wj}) + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi_i N_{\varphi i} + \varphi_j N_{\varphi j}) \right) \\ W_{(s)} &= -R \left( (U_i N'_{ui} + U_j N'_{uj}) + (W_i N'_{wi} + W_j N'_{wj}) + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi_i N'_{\varphi i} + \varphi_j N'_{\varphi j}) \right) \\ \varphi_{(s)} &= -R \left( (U_i N''_{ui} + U_j N''_{uj}) + (W_i N''_{wi} + W_j N''_{wj}) + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi_i N''_{\varphi i} + \varphi_j N''_{\varphi j}) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Na formulação 1P, o campo de deslocamentos é função de polinómios lineares [Melo (1992-1997)].

$$U_{(s)} = a1 + a2s$$

$$W_{(s)} = a3 + a4s$$

$$\varphi_{(s)} = a5 + a6s \quad (4)$$

Com a imposição das condições de fronteira são calculadas as funções de forma:

$$U_{(s)} = U_i N_i + U_j N_j$$

$$W_{(s)} = W_i N_i + W_j N_j$$

$$\varphi_{(s)} = \varphi_i N_i + \varphi_j N_j \quad (5)$$

No modelo 3P, o campo de deslocamentos é linear para  $U$  e de 3ª ordem para  $W$ , [Fonseca (2002-2005)]. A rotação  $\varphi$  obtém-se por derivação.

$$U_{(s)} = a1 + a2s$$

$$W_{(s)} = a3 + a4s + a5s^2 + a6s^3$$

$$\varphi_{(s)} = \frac{\partial W}{\partial s} = a4 + 2a5s + 3a6s^2 \quad (6)$$

Através de condições de fronteira, as funções de forma são lineares para  $U$  e de 3ª ordem para os restantes deslocamentos.

$$U_{(s)} = N_i U_i + N_j U_j$$

$$W_{(s)} = N_1 W_i + N_2 \varphi_i + N_3 W_j + N_4 \varphi_j$$

$$\varphi_{(s)} = \frac{\partial W}{\partial s} = (N_1' W_i + N_2' \varphi_i + N_3' W_j + N_4' \varphi_j) \quad (7)$$

No caso do recente modelo TF, o campo de deslocamento para  $U$  é representado na expressão seguinte e o deslocamento  $W$  é obtido por derivação. A rotação  $\varphi$  é dependente de uma função linear.

$$U_{(s)} =$$

$$= a_1 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + a_2 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + a_3 \cos\left(2\frac{s}{R}\right) + a_4 \sin\left(2\frac{s}{R}\right)$$

$$W_{(s)} = -R \frac{dU}{ds} =$$

$$= a_1 \sin\left(\frac{s}{R}\right) - a_2 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + a_3 2 \sin\left(2\frac{s}{R}\right) - a_4 2 \cos\left(2\frac{s}{R}\right)$$

$$\varphi_{(s)} = a5 + a6s \quad (8)$$

Impondo as condições de fronteira necessárias, obtêm-se as funções de forma para o cálculo dos respectivos deslocamentos:

$$U_{(s)} = (U_i N_1 + U_j N_2) + (W_i N_3 + W_j N_4)$$

$$W_{(s)} = -R((U_i N'_1 + U_j N'_2) + (W_i N'_3 + W_j N'_4))$$

$$\varphi_{(s)} = \varphi_i N_i + \varphi_j N_j \quad (9)$$

O campo de deslocamentos à superfície da casca é obtido por sobreposição de um campo de deslocamentos associado a um tubo de secção circular em que a sua configuração não é alterada conforme estabelecido nas equações anteriores para cada um dos modelos, e em deslocamentos associados ao fenómeno de ovalização e empenamento da secção, conforme solução apresentada por [Thomson (1980)]. Os deslocamentos da superfície, na direcção radial e meridional resultantes unicamente da ovalização, bem como o deslocamento longitudinal resultante do empenamento da secção, são expressos nas seguintes equações:

$$\begin{aligned} w_{(s,\theta)} &= \left( \sum_{n \geq 2} a_n \cos n\theta \right) N_i + \left( \sum_{n \geq 2} a_n \cos n\theta \right) N_j \\ v_{(s,\theta)} &= \left( - \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n} \sin n\theta \right) N_i + \left( - \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n} \sin n\theta \right) N_j \\ u_{(s,\theta)} &= \left( \sum_{n \geq 2} b_n \cos n\theta \right) N_i + \left( \sum_{n \geq 2} b_n \cos n\theta \right) N_j \end{aligned} \quad (10)$$

Os termos  $a_n$  e  $b_n$  são constantes a determinar função do desenvolvimento da série de Fourier para os termos de ovalização e devidos ao empenamento.

Sobrepondo este campo de deslocamentos, a cada um dos modelos anteriormente propostos, obtêm-se os deslocamentos à superfície de uma casca:

$$\begin{aligned} u &= U_{(s)} - r \cos \theta \varphi_{(s)} + u_{(s,\theta)} \\ v &= -W_{(s)} \sin \theta + v_{(s,\theta)} \\ w &= W_{(s)} \cos \theta + w_{(s,\theta)} \end{aligned} \quad (11)$$

O princípio do trabalho virtual torna possível a resolução de um sistema algébrico de equações para obtenção da solução do problema. Desta forma é possível o cálculo do campo de deslocamentos nodais para toda a estrutura em análise. Os deslocamentos nodais são obtidos pela inversão do seguinte sistema de equações:

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (12)$$

O vector força é formado por termos que envolvem forças longitudinais, forças transversais e flexão, ou termos relativos à expansão de Fourier para os deslocamentos de ovalização e empenamento. Os deslocamentos nodais são calculados para

cada elemento que possui 19 graus de liberdade: 1 rotação  $\varphi$  e 2 translações  $U$  e  $W$ , 8 de ovalização e 8 de empenamento.

A matriz rigidez linear é calculada efectuando integrações em  $s$  e  $\theta$ , conforme se representa na seguinte expressão:

$$K = [T] \left( \int_s [B]^T [D] [B] dS \right) [T]^T \quad (13)$$

onde  $dS = r ds d\theta$ ,  $[B]$  é a matriz obtida em função do operador diferencial apresentado na eq.1 multiplicado pelas funções de forma,  $[T]$  é a matriz transformação que permite a passagem da matriz  $[K]$  para o sistema global e  $[D]$  é a matriz das constantes elásticas.

No final a matriz de rigidez elementar fica ordenada na forma seguinte, relativa aos termos de viga que possuem rigidez ao corte e restantes termos sem rigidez de corte:

$$K = \begin{bmatrix} K_{Viga} & K_{VigaOvalEmp} & K_{Viga} & K_{VigaOvalEmp} \\ K_{VigaOvalEmp} & K_{OvalEmp} & K_{VigaOvalEmp} & K_{OvalEmp} \\ K_{Viga} & K_{VigaOvalEmp} & K_{Viga} & K_{VigaOvalEmp} \\ K_{VigaOvalEmp} & K_{OvalEmp} & K_{VigaOvalEmp} & K_{OvalEmp} \end{bmatrix} \quad (14)$$

A integração da matriz rigidez é efectuada numericamente na direcção longitudinal do elemento  $s$ , obedecendo a uma integração exacta na direcção meridional  $\theta$ . No uso da integração numérica optou-se em alguns casos pela integração selectiva dos termos da matriz rigidez, sub integrando apenas as parcelas relativas ao corte, evitando assim a sensibilidade ao fenómeno de *locking* quando a integração é completa, conforme se propõe para os vários modelos em estudo na tabela 1.

**Tabela 1** – Integração numérica: nº de pontos Gauss

Grau polinómio	Pts. Gauss $K_{viga}$ (2n-1)	Pts. Gauss outros termos $K$
5P	3	2
3P	2	2
1P	1	2
TF	1	2

No caso da formulação 5P pode também ser utilizada uma integração exacta na

direcção longitudinal, obtendo-se os mesmos resultados [Fonseca (2002-2005)].

O estado de tensão é definido para cada elemento da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} N_{ss} \\ N_{s\theta} \\ M_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

onde:  $N_{ss}$  é a tensão longitudinal de membrana,  $N_{s\theta}$  a tensão de corte e  $M_{\theta\theta}$  é a tensão de flexão meridional.

Para cascas cilíndricas, em que se considera uma resistência principalmente devida à acção da flexão, associada a uma deformação inextensível da casca, o modelo de deformação pode basear-se num campo de curvaturas e torção, conforme sugerido por [Ugural (1981)] e expresso na seguinte relação, utilizado noutro recente modelo *Ring*.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \chi_{\theta\theta} \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ -\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} \quad (16)$$

onde:  $\chi_{\theta\theta}$  é a curvatura meridional devido à ovalização e  $\chi_{s\theta}$  a variação da torção.

O campo de deslocamento para o elemento *Ring* caracteriza uma ovalização uniforme num tubo e uma variação ao longo do comprimento da casca. As funções de forma foram obtidas em função de deslocamentos na direcção radial.

O elemento *Ring* tem 5 nós por secção. Dada a simetria de carregamento e geometria efectuou-se o estudo unicamente em metade dessa secção, considerando um conjunto de funções trigonométricas.

Consideraram-se 8 parâmetros desconhecidos para a obtenção do deslocamento transversal radial, atendendo aos graus de liberdade propostos, conforme figura 3. O deslocamento transversal  $v$  pode ser obtido utilizando uma equação simples da teoria de vigas. A rotação obtém-se utilizando a função derivada do deslocamento transversal  $w$ .

$$w_{(s,\theta)} = \sum_{i=2}^9 a_{i-1} i \cos i\theta + S \sum_{i=2}^9 b_{i-1} i \sin i\theta$$

$$\begin{aligned} v_{(s,\theta)} &= -\sum_{i=2}^9 a_{i-1} \sin i\theta - S \sum_{i=2}^9 b_{i-1} \cos i\theta \\ \varphi_{(s,\theta)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \\ &= -\frac{1}{r} \sum_{i=2}^9 a_{i-1} i^2 \sin i\theta - \frac{S}{r} \sum_{i=2}^9 b_{i-1} i^2 \cos i\theta \end{aligned} \quad (17)$$

Os parâmetros desconhecidos  $a_i$  são determinados através de um sistema de equações do tipo:

$$\{\delta\} = [B] \{a_i\} \quad (18)$$

onde:

$$\{\delta\}_{k=i \text{ ou } j}^T = \{W_{1k} \quad W_{2k} \quad \varphi_{2k} \quad W_{3k} \quad \varphi_{3k} \quad W_{4k} \quad \varphi_{4k} \quad W_{5k}\}^T$$

representa o campo de deslocamentos globais relativos aos graus de liberdade do semi-anel multi nodal e  $[B]$  é a matriz das constantes que resulta da aplicação das condições fronteira.

A matriz rigidez linear é calculada efectuando integrações exactas em  $s$  e  $\theta$ , conforme expressão 13.

## 4 - CASOS EM ESTUDO

### 4.1 - Análise de tensões em estruturas tubulares

A figura 4 representa um acessório curvo solicitado por um conjunto de forças concentradas diametralmente, conforme sugerido e analisado experimentalmente por [Wilczek (1984)], que pode ocorrer frequentemente em situações industriais como se visualiza na figura 1. O módulo de elasticidade é igual a  $E = 73575 \text{ [N/mm}^2\text{]}$  e o coeficiente de *Poisson* igual a 0.3.

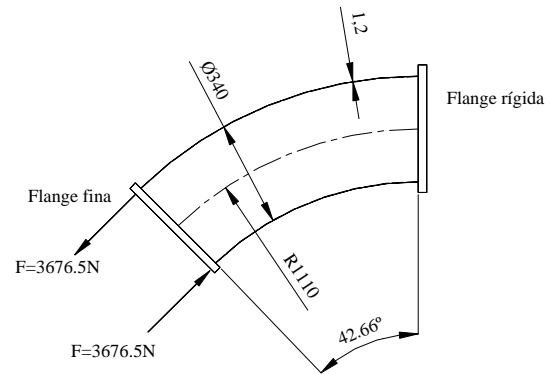


Fig. 4 - Parâmetros geométricos e condições fronteira para o acessório curvo.

As figuras 5 e 6 representam o estado de tensão normal e de corte obtido para a secção central do acessório curvo, utilizando alguns dos modelos numéricos referidos na figura 2.

Compararam-se os resultados com os que foram obtidos experimentalmente por [Wilczek (1984)] e numericamente por [Melo (1992)].

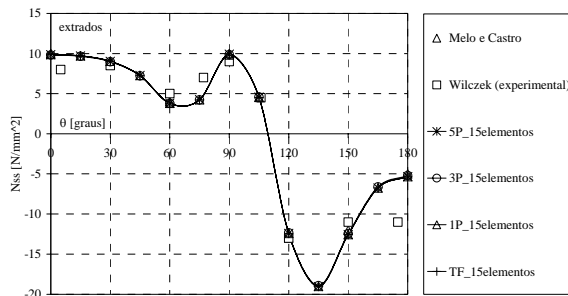


Fig. 5 - Tensão normal a meio da secção do acessório curvo.

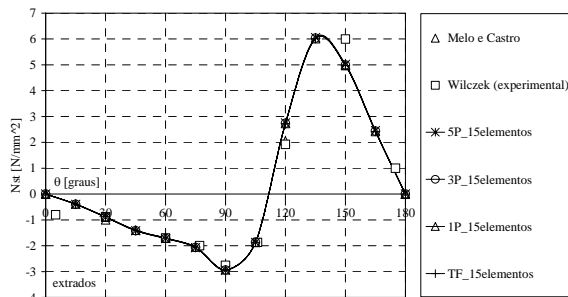


Fig. 6 - Tensão de corte a meio da secção do acessório curvo.

#### 4.2 - Análise da deformação em anéis circulares

O caso em estudo é representado na figura 7, simulando uma estrutura em anel tubular de aço submetida a uma carga \$F\$ por unidade de comprimento, com as extremidades livres.

O módulo de elasticidade do material é igual a \$E=2.1\$ [GPa] e o coeficiente de Poisson igual a 0.3.

Pretende-se obter o valor do deslocamento vertical \$d\$ no topo da secção recta do tubo, função de uma carga \$F\$ aplicada, que ocorre em situações de transporte e empilhamento de tubagens, figuras 1 e 8.

O valor teórico para o cálculo desse deslocamento pode ser obtido em função de

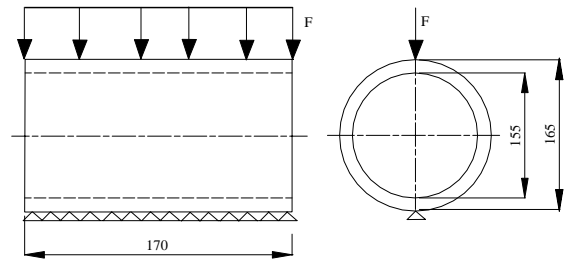


Fig. 7 - Parâmetros geométricos para a estrutura em anel tubular.

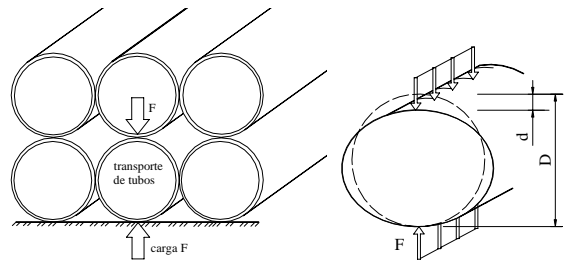


Fig. 8 - Transporte e empilhamento de tubagens.

uma força concentrada \$P\$ transversal, utilizando o teorema de Castiglino, através da seguinte expressão:

$$d = - \left[ \frac{Pr^3(\pi^2 - 8)}{8\pi EI} + \frac{Pr\pi}{8GAm} + \frac{Pr\pi}{8EA} \right] \quad (19)$$

Neste caso considerou-se:

$$I = \frac{Lr^3}{12}, \quad A = tL, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad m = \frac{9}{10}$$

o factor de correcção da carga \$P\$.

O procedimento experimental representa-se na figura 9. Para a implementação da carga, utilizou-se uma célula de carga através de um sistema hidráulico. Os deslocamentos foram obtidos recorrendo a um sistema de aquisição de dados através da medição efectuada com um LVDT.

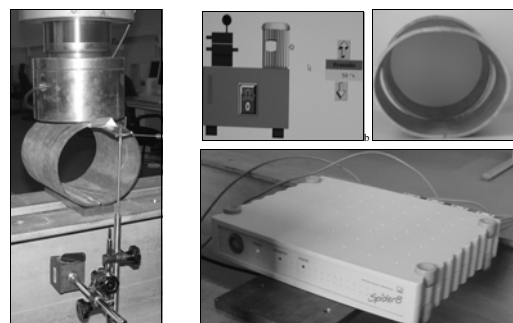


Fig. 9 - Sistema experimental utilizado.

Na figura 10 representa-se o deslocamento vertical obtido, função da carga  $F$ . Os resultados obtidos para a parte linear dos ensaios realizados, são comparados com os obtidos utilizando a solução analítica e os resultados numéricos obtidos com o elemento *Ring* representado na figura 3. É possível verificar que os tubos ensaiados possuem uma rigidez tubular igual a 28 [kN/m<sup>2</sup>], verificada em função da zona elástica da curva F-d, como proposto por [Watkins (2000)].

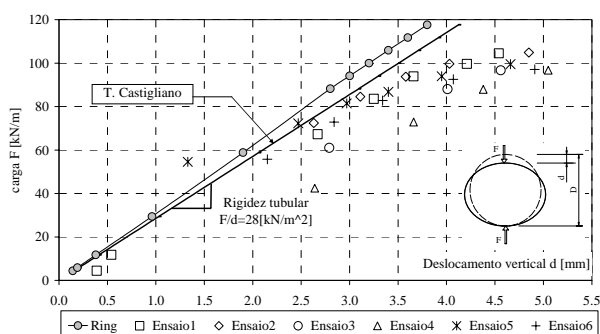


Fig. 10 – Deslocamento vertical  $d$ .

## 5- CONCLUSÕES

A complexidade, na análise, de estruturas do tipo mencionado, exige o recurso a métodos numéricos de elevado desempenho, pelo que se recorreu à utilização do método dos elementos finitos, desenvolvendo elementos com estas características. Para além do campo de tensões possível de obter em função de qualquer tipo de carregamento, é possível ainda obter a rigidez de estruturas tubulares através da sua resistência à deflexão. Estes parâmetros são muito importantes na concepção de estruturas deste tipo, tendo em vista as aplicações decorrentes e inclusive o transporte prévio e instalação posterior.

## REFERÊNCIAS

von Kármán Th., “Über die Formänderung Dünnwandiger Rohre Insbesondere Federnder Ausgleichrohre“, Zeits V.D.I., Band 55,ss. 1889-1895, 1911.

Vigness L., “Elastic Properties of Curved Tubes“, Trans A.S.M.E., Vol. 65, pp.105-120, 1943.

Cheng D.H., Thailer M.J., “On the Bending of Curved Circular Tubes“, A.S.M.E., Journ. Eng. Indust., Vol. 92, ser. B, nº1, pp. 62-66, 1970.

Thomson G., “The Influence of End Constraints on Pipe Bends“, PhD Thesis, University of Strathclyde, Scotland, UK, 1980.

Bathe K. J., Almeida C. A., “A Simple and Effective Pipe Elbow Element – Pressure Stiffening Effects“, Journal of Applied Mechanics, Vol.49, pp.914-916, 1982.

Wilczek E., “Statische Berechnung eines Rohrkrümmers mit Realen Randbedingungen“, Ph.D. thesis, Technischen Hochschule Aachen, Aachen, 1984.

Melo F.J.M.Q., Castro P.M.S.T., “A Reduced Integration Mindlin Beam Element for Linear Elastic Stress Analysis of Curved Pipes Under Generalized In-Plane Loading“, Computers & Structures, Vol.43 Nº 4, pp.787-794, 1992.

Melo F.J.M.Q., Castro P.M.S.T., “The Linear Elastic Stress Analysis of Curved Pipes Under Generalized Loads Using a Reduced Integration Finite Ring Element“, Journal of Strain Analysis, Vol.32/1, pp 47-59, 1997.

Fonseca E.M.M., Melo F.J.M.Q., Oliveira C.A.M, “Determination of Flexibility Factors on Curved Pipes with end Restraints Using a Semi-Analytic Formulation“, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol.79/12, pp 829-840, 2002.

Fonseca E.M.M., Melo F.J.M.Q., Oliveira C.A.M, “The Thermal and Mechanical Behaviour of Structural Steel Piping Systems“, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol.82/2, pp.145-153, 2005.

Flügge W., “Thin elastic shells“, 2nd ed., Springer, Berlin, 1973.

Kitching R., “Smooth and mitred pipe bends“, In: Gill SS, editor. *The stress analysis of pressure vessels and pressure vessels components*, Pergamon Press, Oxford, Chapter 7, 1970.

Watkins R.K., Anderson L.R., “Structural mechanics of buried pipes“, CRC Press, New York, 2000.