

ANÁLISIS TERMOHIDRODINÁMICO DE UN PAR EJE-COJINETE COMBINANDO MÉTODOS DE VOLÚMENES FINITOS Y ELEMENTOS DE CONTORNO

J. Durany¹, J. Pereira¹, F. Varas¹

durany@dma.uvigo.es, curro@dma.uvigo.es

¹Dep. Matemática Aplicada II, Universidad de Vigo, España

RESUMEN

En este trabajo se propone y se resuelve numéricamente un modelo acoplado para la presión y la temperatura del fluido lubricante en un par eje-cojinete, incluyendo el intercambio térmico con el ambiente a través del eje y el cojinete. Para desacoplar el problema se plantea un algoritmo de punto fijo en tres etapas hasta alcanzar el estado de equilibrio. En concreto, se resuelve mediante el método de elementos finitos la ecuación de Reynolds con un modelo de cavitación de Elrod-Adams para la presión del fluido. A continuación se obtiene la solución de la ecuación de la energía en el fluido utilizando un esquema de volúmenes finitos de tipo cell-vertex de orden dos. Finalmente, la solución de la ecuación de conducción térmica en el cojinete se realiza con un método de elementos de contorno P_1 y se considera un modelo térmico simplificado en el eje.

1. INTRODUCCIÓN

En lubricación hidrodinámica se ha utilizado muy frecuentemente la teoría isoterma como simplificación de los problemas que conducen al cálculo de las presiones. Sin embargo, en regímenes severos de funcionamiento, soportando grandes cargas y velocidades de rotación, la temperatura del fluido puede variar notablemente como consecuencia de la disipación energética por efectos viscosos y, también, por el intercambio térmico con el exterior del dispositivo. Este hecho puede influir de manera importante en la predicción de varias características de funcionamiento del par como, por ejemplo, en la potencia consumida.

Algunos trabajos recientes que han tratado este tipo de problemas (ver Fillon-Bouyer [8], Kucinschi-Fillon-Frene-Pascovici [7], Paranjpe-Han [13], [14], Zhang-Yi-Zhang [15], Costa-Miranda-Fillon-Claro [2], por

ejemplo) utilizan esquemas numéricos de orden uno con discretizaciones de volúmenes finitos y elementos finitos. Las novedades que se proponen aquí radican, por una parte, en la utilización de un esquema de volúmenes finitos tipo cell-vertex de orden dos para la temperatura del fluido, lo que permite obtener mejores aproximaciones de la solución térmica sin necesidad de refinar las mallas y, por otra parte, en el planteamiento de un método de elementos de contorno para el cálculo de la temperatura en el cojinete. Ambas elecciones permiten una gran reducción del coste computacional del problema global acoplado.

Este modelo termohidrodinámico se formula mediante la ecuación de Reynolds con un modelo de cavitación de Elrod-Adams para el cálculo de la presión, la ecuación de la energía para la temperatura del fluido y unas ecuaciones de conducción térmica en el eje y en el cojinete. El

acoplamiento de las ecuaciones en derivadas parciales viene dada, por una parte, por una ley de variación de la viscosidad en función de la temperatura en la ecuación del flujo y, por otra parte, por medio de la influencia del campo de velocidades en la ecuación de la energía. Además, el acoplamiento térmico del fluido con el dispositivo viene dada por las condiciones de contorno en las paredes de contacto con eje y cojinete. En un análisis posterior han de tenerse en cuenta las posibles deformaciones del par dentro de un contexto termoelastohidrodinámico.

Inicialmente, se considera un problema simétrico tridimensional donde, despreciando las variaciones de la temperatura en la dirección axial, es suficiente realizar los cálculos en una sección media del dispositivo. Este problema térmico presenta básicamente dos dificultades: su carácter fuertemente convectivo y la no linealidad debida a la viscosidad. Nuestro objetivo es conseguir esquemas que proporcionen una mejor aproximación sin necesidad de refinar la malla. Siguiendo el trabajo de Morton-Stynes-Süli [11], se desarrolla un esquema de volúmenes finitos de tipo *cell-vertex* de orden dos. Este método combina unas buenas propiedades de monotonía en la recuperación de capas límite con una convergencia de orden dos bajo ciertas hipótesis de regularidad. Además, conduce a un ensamblado muy sencillo, parecido al del método de elementos finitos, que se simplifica si las mallas son muy estructuradas.

La resolución del problema térmico en el cojinete se aborda empleando un método de elementos de contorno (BEM), con una discretización de la frontera, tanto interna como externa, mediante elementos P_1 . Los nodos de la discretización son los vértices de los arcos que, en la frontera interna de contacto con el fluido, coinciden con los nodos de la malla utilizada en el método de volúmenes finitos. Las condiciones impuestas son la continuidad del flujo en la frontera interior y la igualdad del flujo a la convección al ambiente en la frontera

exterior. Este procedimiento tiene la ventaja de no tener que mallar todo el cojinete y, junto con la simetría del problema, permite reducir en gran medida el coste computacional de esta etapa.

La resolución del problema térmico en el eje se ha tratado considerando que los gradientes de temperatura en sentido circunferencial son despreciables. Esto lleva a un problema unidimensional de balance de energía que considera el eje como una masa.

Finalmente, se presentan algunos resultados numéricos en pares eje-cojinete con alimentación axial, que ponen de manifiesto la efectividad de la combinación de estos métodos de resolución, así como la influencia en el proceso de los aspectos térmicos del problema.

2. ECUACIONES BÁSICAS

Cuando las condiciones de funcionamiento de un par eje-cojinete son normales, los gradientes axiales de temperatura son despreciables y la ecuación de la energía para la temperatura del fluido lubricante \bar{T}_f se puede plantear en coordenadas de longitud y espesor (θ, \bar{y}) (ver [6], entre otros):

$$P_e \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial \theta} + \frac{1}{h} \left(\bar{v} - \bar{u} \bar{y} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial \bar{y}} \right] - \frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial \bar{y}^2} = N_d \frac{\bar{\mu}}{h^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \quad \text{en } \Omega_f, \quad (1)$$

donde P_e es el número de Peclet, N_d un parámetro adimensional asociado a la disipación viscosa, $\Omega_f = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ y el espesor de la película de fluido está dado por la expresión:

$$\bar{h}(\theta) = 1 + \varepsilon \cos \theta, \quad (2)$$

donde se observa la dependencia del coeficiente de excentricidad del par.

Las componentes de la velocidad del fluido (\bar{u}, \bar{v}) dentro del dominio se obtienen a

partir de los gradientes de presión \bar{p} , que es solución de la ecuación de Reynolds junto a un modelo de Elrod-Adams para la cavitación (ver Calvo-Durany-Vázquez [1] o Durany-García-Vázquez [4], por ejemplo). Este modelo matemático se basa en una ley de conservación de flujo para el fluido a través de la frontera libre que separa la zona lubricada ($\bar{p} > 0$) de la cavitada ($\bar{p} = 0$), e introduce como incógnita adicional la saturación ϑ del fluido, la cual toma el valor 1 en la primera zona y un valor entre 0 y 1 en la segunda. La ecuación de base está dada por la clásica ecuación de Reynolds en la zona lubricada, que por simplicidad en la exposición se plantea en dimensión uno, y la formulación del problema hidrodinámico se escribe en la forma:

Hallar la presión \bar{p} y la concentración ϑ tal que:

$$\frac{d}{d\theta} \left(\bar{h}^3 \bar{G} \frac{d\bar{p}}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{\bar{I}_2}{J_2} \right), \quad \bar{p} > 0 \text{ y } \vartheta = 1 \text{ en } \Omega_1^+, \quad (3)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\vartheta \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{\bar{I}_2}{J_2} \right) \right) = 0, \quad \bar{p} = 0 \text{ y } 0 \leq \vartheta \leq 1 \text{ en } \Omega_1^0, \quad (4)$$

$$\vartheta(0) = \vartheta_0 \text{ y } \bar{p}(2\pi) = 0, \quad (5)$$

$$\bar{h}^3 \bar{G} \frac{d\bar{p}}{d\theta} = (1 - \vartheta) \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{\bar{I}_2}{J_2} \right) \text{ y } \bar{p} = 0 \text{ en } \Sigma, \quad (6)$$

donde

$$\bar{G} = \int_0^1 \frac{\bar{y}}{\bar{\mu}} \left(\bar{y} - \frac{\bar{I}_2}{J_2} \right) d\bar{y}, \quad \bar{I}_2 = \int_0^1 \frac{\bar{y}}{\bar{\mu}} d\bar{y}, \quad \bar{J}_2 = \int_0^1 \frac{d\bar{y}}{\bar{\mu}}, \quad (7)$$

y Ω_1^+ y Ω_1^0 describen la zona lubricada y cavitada en $\Omega_1 = [0, 2\pi]$, respectivamente. La frontera libre Σ que separa ambas zonas es una incógnita adicional del problema.

En un planteamiento más realista del problema de lubricación en su forma bidimensional, el acoplamiento termohidrodinámico con la ecuación de la energía (1) puede efectuarse en una o en varias secciones longitudinales. En cualquier caso, dicho acoplamiento viene dado por la viscosidad del fluido que interviene en las funciones $\bar{G}, \bar{I}_2, \bar{J}_2$, y que varía con la temperatura según la ley

$$\bar{\mu} = e^{-\beta T_0 (T_f - 1)}, \quad (8)$$

donde β es el coeficiente termoviscoso y T_0 la temperatura de referencia.

Puesto que la variable ϑ representa la fracción de volumen ocupada por el lubricante, la ecuación de conservación de la energía (1) deberá reformularse sobre la región cavitada para tener en cuenta la presencia de dicha mezcla. Así, suponiendo que la velocidad del gas es igual a la del fluido y que la generación en el gas es prácticamente nula, una expresión genérica y dimensional de dicha ecuación viene dada por:

$$[\rho_f c_f \vartheta + \rho_a c_a (1 - \vartheta)] \bar{v} \nabla(T_f) - (k_f \vartheta + k_a (1 - \vartheta)) \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} = \vartheta \Phi_f, \quad (9)$$

donde $\rho_f, c_f, k_f, \rho_a, c_a, k_a$ denotan la densidad, calor específico y conductividad térmica del fluido y gas, respectivamente, y Φ_f es la disipación viscosa en el lubricante.

Siguiendo criterios clásicos de adimensionalización (ver [6], por ejemplo), los términos de convección y difusión en (9) se pueden escribir en la forma:

$$\bar{v} \nabla(T_f) = \omega T_0 \bar{u} \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial \theta^*} + \omega \bar{T}_0 \frac{\bar{v}}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{T}_f}{\partial \bar{y}}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} = \frac{T_0}{C h^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial \bar{y}^2}, \quad (11)$$

siendo ω la velocidad de rotación, C la diferencia de radios del eje y cojinete y T_0

la temperatura de referencia del lubricante en la ecuación (8). El operador diferencial

$$\frac{\partial}{\partial \theta^*} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\bar{y}}{h} \frac{d\bar{h}}{d\theta} \frac{\partial}{\partial \bar{y}}$$

es consecuencia del cambio de variable al considerar la geometría circunferencial como un dominio rectangular.

Análogamente, se tiene el término de disipación viscosa en forma adimensional:

$$\Phi_f = \frac{\mu_0 \omega^2 R_a^2}{C^2} \frac{\bar{\mu}}{h^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 \quad (12)$$

donde μ_0 es la viscosidad a la temperatura de referencia y R_a el radio del eje.

Por tanto, con las ecuaciones adimensionalizadas (10), (11), (12), el problema térmico (9) se formula en Ω_f mediante la expresión (1), pero ahora con P_e y N_d dependiendo de la concentración del fluido:

$$P_e = \frac{\omega C^2 [\rho_f c_f \vartheta + \rho_a c_a (1 - \vartheta)]}{[k_f \vartheta + k_a (1 - \vartheta)]} ;$$

$$N_d = \frac{\mu_0 \omega^2 R_a^2}{[k_f \vartheta + k_a (1 - \vartheta)] T_0} . \quad (13)$$

Las componentes de la velocidad (\bar{u}, \bar{v}) están definidas por (ver [6], entre otros):

$$\bar{u} = \bar{h}^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \left(\bar{I} - \frac{\bar{I}_2}{J_2} \bar{J} \right) + \frac{\bar{J}}{J_2} ;$$

$$\bar{v} = -\bar{h} \int_0^{\bar{y}} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \theta^*} \right) d\xi , \quad (14)$$

con \bar{I}_2, \bar{J}_2 dadas en (7) e \bar{I}, \bar{J} , son las integrales:

$$I = \int_0^{\bar{y}} \frac{\xi}{\bar{\mu}} d\xi \quad ; \quad J = \int_0^{\bar{y}} \frac{d\xi}{\bar{\mu}} . \quad (15)$$

Introduciendo las funciones:

$$\bar{b}(\theta, \bar{y}) = \left(P_e \bar{u}, \frac{P_e}{h} \left(\bar{v} - \bar{u} \bar{y} \frac{d\bar{h}}{d\theta} \right) \right) , \quad (16)$$

$$\delta(\theta) = \frac{1}{h^2} , \quad (17)$$

$$g(\bar{T}_f) = \mu(\bar{T}_f) \frac{N_d}{h^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \text{div}(\bar{b}) \bar{T}_f , \quad (18)$$

se obtiene una notación clásica de la ecuación de la energía:

$$\text{div}(\bar{b} \bar{T}_f) - \delta \frac{\partial^2 \bar{T}_f}{\partial \bar{y}^2} - g(\bar{T}_f) = 0 , \quad (19)$$

que se corresponde con un problema térmico con velocidad convectiva \bar{b} , difusión en la dirección \bar{y} y un término de generación interna $g(\bar{T}_f)$ en el dominio. Tanto la convección como la generación dependen de la presión hidrodinámica a través de las velocidades. La ecuación (19) se completa con las condiciones Dirichlet en la frontera de entrada, $\theta=0$, y en las fronteras de contacto con el eje $\bar{y}=1$ y el cojinete $\bar{y}=0$.

La ecuación de la energía en el cojinete se reduce a un problema de difusión junto a las condiciones de contorno que la acoplan, por una parte, con la temperatura del fluido y, por otra parte, con las condiciones ambientales:

$$-\text{div}(k_c \nabla T_c) = 0 \quad \text{en } \Omega_c \quad (20)$$

$$-k_c \frac{dT_c}{d\bar{n}} = h_a (T_c - T_a) \quad \text{en } \Gamma_c^e \quad (21)$$

$$T_c = T_0 T_f , \quad -k_c \frac{dT_c}{d\bar{n}} = k_f \frac{T_0}{Ch} \frac{dT_f}{d\bar{y}} \quad \text{en } \Gamma_c^i \quad (22)$$

donde T_c es la función temperatura en el cojinete, Ω_c el dominio del cojinete con frontera interior Γ_c^i y exterior Γ_c^e , k_c y k_f los coeficientes de conducción en el cojinete y en el fluido, \bar{n} un vector genérico, unitario, normal y exterior a las fronteras, T_a la temperatura ambiente y h_a el coeficiente de convección al exterior. Finalmente, en el eje se considera un modelo de temperatura uniforme debido a las altas velocidades de rotación. Así, el calentamiento o enfriamiento se corresponde con el balance entre el calor recibido del fluido y el flujo térmico con el exterior. Es decir:

$$\int_{\Gamma_e} k_f \frac{T_0}{Ch} \frac{d\bar{T}_f}{dy} dl = h_e(T_e - T_a) \quad (23)$$

donde T_e es la temperatura en el eje, Γ_e la frontera con el fluido, h_e el coeficiente de convección al aire y la derivada normal en la frontera se corresponde con la vertical.

3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA HIDRODINÁMICO

Para resolver el problema hidrodinámico de lubricación (3)-(6) con un método de elementos finitos, se construye una formulación débil en términos del operador multívoco de Heaviside, H (ver Calvo-Durany-Vázquez [1], Durany-García-Vázquez [4], para los detalles):

$$\int_{\Omega_1} \bar{h}^3 G \frac{d\bar{p}}{d\theta} \frac{d\bar{\varphi}}{d\theta} d\theta = \int_{\Omega_1} \vartheta \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{I_2}{J_2} \right) \frac{d\bar{\varphi}}{d\theta} d\theta + \vartheta_0 \bar{\varphi}(0) \left(\bar{h}(0) - \bar{h}(0) \frac{I_2}{J_2} \right), \quad \forall \bar{\varphi} \in V = \{ \bar{\varphi} \in W^{1,0}(\Omega_1) / \bar{\varphi}(2\pi) = 0 \}, \quad (24)$$

$$\vartheta \in H(\bar{p}), \quad (25)$$

donde aparece el clásico espacio de Sobolev $W^{1,0}$.

Integrando por partes y reescribiendo (24) mediante la derivada total

$$\int_{\Omega_1} \bar{h}^3 G \frac{d\bar{p}}{d\theta} \frac{d\bar{\varphi}}{d\theta} d\theta + \int_{\Omega_1} \frac{D}{Dt} \left[\vartheta \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{I_2}{J_2} \right) \right] \bar{\varphi} d\theta = 0, \quad \forall \bar{\varphi} \in V, \quad (26)$$

se puede utilizar un esquema de características para discretizar dicha derivada, siguiendo el campo de velocidades artificial $w_1(\theta)=1$. Así, el problema (25), (26) se aproxima por una familia de k ecuaciones no lineales estacionarias, para k paso de tiempo ficticio, y se itera hasta alcanzar el estado de equilibrio:

$$\int_{\Omega_1} \bar{h}^3 G \frac{d\bar{p}^{n+1}}{d\theta} \frac{d\bar{\varphi}}{d\theta} d\theta + \frac{1}{k} \int_{\Omega_1} \vartheta^{n+1} \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{I_2}{J_2} \right) \bar{\varphi} d\theta = \frac{1}{k} \int_{\Omega_1} (\vartheta^n \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{I_2}{J_2} \right)) \circ \chi^k \bar{\varphi} d\theta, \quad \forall \bar{\varphi} \in V, \quad (27)$$

$$\vartheta^{n+1} \in H(p^{n+1}), \quad (28)$$

donde $X_k(\theta) = X(\theta, t; t-k)$ denota la posición de una partícula de fluido en el tiempo $(t-k)$ que se encuentra en el punto θ en el tiempo t . Esto es, X es solución del siguiente problema de valor final:

$$\frac{d}{d\tau} (\chi(\theta, t; \tau)) = w_1(\chi(\theta, t; \tau)) \quad ; \quad \chi(\theta, t; t) = \theta.$$

Finalmente, a cada iteración de este algoritmo artificial en tiempo, se resuelve la no linealidad de $H(p^{n+1})$ utilizando un método de dualidad desarrollado en [1]. Se trata de otro algoritmo iterativo que en cada etapa m , resuelve el problema lineal

$$\int_{\Omega_1} \bar{h}^3 G \frac{d(\bar{p}^{n+1})^m}{d\theta} \frac{d\bar{\varphi}}{d\theta} d\theta + \frac{\bar{\omega}}{k} \int_{\Omega_1} ((\bar{p}^{n+1})^m) \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{I_2}{J_2} \right) \bar{\varphi} d\theta = \frac{1}{k} \int_{\Omega_1} (\vartheta^n \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{I_2}{J_2} \right)) \circ \chi^k \bar{\varphi} d\theta - \frac{1}{k} \int_{\Omega_1} ((\bar{\beta}^{n+1})^m) \left(\bar{h} - \bar{h} \frac{I_2}{J_2} \right) \bar{\varphi} d\theta, \quad \forall \bar{\varphi} \in K_0 = \{ \bar{\varphi} \in V / \bar{\varphi}|_{\Gamma} = 0 \}, \quad (29)$$

y actualiza el multiplicador $\bar{\beta}^{n+1}$ mediante la expresión:

$$(\bar{\beta}^{n+1})^{m+1} = H_{\lambda}^{\bar{\omega}}((\bar{p}^{n+1})^m + \lambda(\bar{\beta}^{n+1})^m) \quad (30)$$

con $\bar{\omega}, \lambda$ números reales positivos y $H_{\lambda}^{\bar{\omega}}$ la aproximación Yosida del operador $H - \bar{\omega} I$, siendo I el operador identidad. La convergencia de este algoritmo se analiza en [1] eligiendo $\bar{\omega}, \lambda$ tal que $\bar{\omega}\lambda = \frac{1}{2}$.

La discretización espacial del problema (29) se realiza con elementos finitos de Lagrange P_1 .

4. SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA TÉRMICO EN EL FLUIDO

El método numérico que se propone para resolver el problema térmico (19) en el fluido se basa en un esquema de volúmenes finitos (FVM) de tipo cell-vertex de orden dos (ver [11] para los detalles) y esquemas pseudotemporales para los sistemas de ecuaciones no lineales resultantes. Ello permite obtener mejores aproximaciones de la solución que los esquemas habituales de descentrado (de orden uno) sin necesidad de refinar las mallas y, en consecuencia, se reduce en gran medida el coste computacional del problema hidrodinámico.

El dominio rectangular del problema Ω_f se divide mediante una malla uniforme de N_α celdas rectangulares Ω_α de longitud h_θ y altura h_y , y sus fronteras se denotan por Γ_α^j , con $j=1, \dots, 4$. Entonces el residuo R_α de la ecuación (19) asociado a cada celda, Ω_α , está dado por:

$$\int_{\Omega_\alpha} \text{div}(\bar{b}T_f) d\Omega - \int_{\Omega_\alpha} \delta \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2} d\Omega - \int_{\Omega_\alpha} g(T_f) d\Omega = R_\alpha, \quad (31)$$

que puede reescribirse en la forma:

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\Gamma_\alpha^j} (\bar{b} \cdot \bar{n}) T_f d\Gamma - \int_{\Gamma_\alpha^2} \delta \frac{\partial T_f}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha^2} \delta \frac{\partial T_f}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega_\alpha} g(T_f) d\Omega = R_\alpha, \quad (32)$$

donde \bar{n} es el vector unitario normal exterior a la frontera Ω_α .

En una celda Ω_α el flujo convectivo a través de cada uno de los tramos de la frontera Γ_α^j se aproxima empleando la fórmula del trapecio. Si denominamos \bar{b}_i al vector $\bar{b}(\theta, y) = (b_i^{(\theta)}, b_i^{(y)})$, en el vértice i nos quedan las fórmulas siguientes para el cálculo del término en una celda:

$$\int_{\Gamma_\alpha^1} (\bar{b} \cdot \bar{n}) T_f d\Gamma \approx \frac{1}{2} [b_1^{(y)} T_1 + b_2^{(y)} T_2] h_\theta, \quad (33)$$

$$\int_{\Gamma_\alpha^2} (\bar{b} \cdot \bar{n}) T_f d\Gamma \approx \frac{1}{2} [-b_3^{(y)} T_3 - b_4^{(y)} T_4] h_\theta$$

$$\int_{\Gamma_\alpha^3} (\bar{b} \cdot \bar{n}) \bar{T}_f d\Gamma \approx \frac{1}{2} [-b_1^{(\theta)} \bar{T}_1 - b_3^{(\theta)} \bar{T}_3] h_y,$$

$$\int_{\Gamma_\alpha^4} (\bar{b} \cdot \bar{n}) \bar{T}_f d\Gamma \approx \frac{1}{2} [b_2^{(\theta)} \bar{T}_2 + b_4^{(\theta)} \bar{T}_4] h_y \quad (34)$$

El cálculo de los flujos difusivos exige el cálculo en cada uno de los vértices de la celda de las derivadas $\frac{\partial \bar{T}_f}{\partial y}$. Se emplea el esquema descrito por Morton [12] que proporciona la fórmula para aproximar el gradiente en una celda:

$$\frac{\partial T_f}{\partial y} \approx \frac{1}{h_y} \left(\frac{T_1 + T_2}{2} - \frac{T_3 + T_4}{2} \right), \quad (35)$$

calculándose el valor en los vértices como media de los valores del gradiente en las celdas a las que pertenece.

Finalmente, el término de generación se aproxima considerando las funciones de base P_1 asociadas a cada uno de los nodos de la celda. En el caso de una malla regular se tiene:

$$\int_{\Omega_\alpha} g(T_f) d\Omega \approx \frac{h_\theta h_y}{4} \sum_{i=1}^4 g(T_i). \quad (36)$$

Estas ecuaciones (33), (34), (35) y (36) se deben de modificar convenientemente para las celdas con algún lado en la frontera.

Ensamblando las contribuciones de las ecuaciones (31) se obtiene una matriz nodal $\bar{N}(T_f)$ en la forma:

$$\bar{N}_{i,j}(T_f) = \frac{\sum_{\alpha=(i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})} [V_\alpha D_{\alpha,i,j} R_\alpha + V_\alpha A_{\alpha,i,j}]}{4V_\alpha} \quad (37)$$

donde $\alpha = (i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2})$ denota las cuatro celdas a las que pertenece el nodo (i, j) ,

R_α es el residuo en la celda, V_α el volumen de control y $D_{\alpha,i,j}$ la matriz de distribución de residuos nodales que recoge el descentramiento convectivo a partir del campo de velocidades (16). Es decir,

$$D_{\alpha,i,j} = D_\alpha(\bar{b}_\alpha),$$

con \bar{b}_α la velocidad promedio en la celda. Por ejemplo, es apropiado considerar:

$$\begin{aligned} D_{\alpha,i,j} &= (1 + \text{sign}(b_\alpha^{(\theta)})) \cdot (1 - \text{sign}(b_\alpha^{(y)})) \\ D_{\alpha,i,j-1} &= (1 - \text{sign}(b_\alpha^{(\theta)})) \cdot (1 - \text{sign}(b_\alpha^{(y)})) \\ D_{\alpha,i-1,j} &= (1 + \text{sign}(b_\alpha^{(\theta)})) \cdot (1 + \text{sign}(b_\alpha^{(y)})) \\ D_{\alpha,i-1,j-1} &= (1 - \text{sign}(b_\alpha^{(\theta)})) \cdot (1 + \text{sign}(b_\alpha^{(y)})) \end{aligned}$$

En la matriz nodal (37) es necesario añadir un término de difusión artificial de cuarto orden $A_{\alpha,i,j}$ para que todos los nodos de la malla tengan garantizada su correspondiente ecuación de residuos:

$$A_{\alpha,i,j} = \tau_\alpha \left(\delta_h^2 \bar{T}_{f,i,j} - \overline{\delta_h^2 \bar{T}_{f,\alpha}} \right), \quad (38)$$

donde τ_α es un parámetro de orden h_θ^2 para mallas rectangulares ($h_\theta = h_y$), $\delta_h^2 \bar{T}_{f,i,j}$ es un valor relacionado con los cambios de la derivada de la temperatura en el nodo y $\overline{\delta_h^2 \bar{T}_{f,i,j}}$ es un promedio del valor previo para todos los nodos de la celda (ver [10], [11], para los detalles).

Por último, realizando el ensamblado de manera similar al método de elementos finitos, se realiza un bucle en celdas para introducir las contribuciones nodales de (37) en el vector global de residuos $N(\bar{T}_f)$. De este modo, se obtiene el sistema no lineal:

$$N(\bar{T}_f) = 0, \quad (39)$$

con

$$N_i(\bar{T}_f) = \sum_{j=1}^{NN} K_{ij} \bar{T}_{f,j} - \sum_{j=1}^{NN} M_{ij} g(\bar{T}_{f,j}), \quad (40)$$

siendo NN el número de nodos y donde la parte lineal K_{ij} recoge la difusión y convección del problema y el término de generación aparece en $g(\bar{T}_{f,j})$ y en la matriz M_{ij} .

La solución del sistema de ecuaciones no lineal resultante (40) se obtiene mediante un esquema pseudotemporal. Para ello, se introduce la derivada artificial en tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{T}_{f,i}}{dt} &= - \sum_{j=1}^{NN} K_{ij} \bar{T}_{f,j} + \sum_{j=1}^{NN} M_{ij} g(\bar{T}_{f,j}) \\ &= -N(\bar{T}_{f,i}) \end{aligned} \quad (41)$$

La matriz $N(\bar{T}_f)$ contiene la discretización del término difusivo de segundo orden más una difusión artificial de cuarto orden, $\tau_\alpha \delta_h^2 \bar{T}_f$, en algunos nodos y, en consecuencia, el problema tiene carácter stiff. Por lo tanto, para los esquemas explícitos es necesaria la condición de estabilidad:

$$\Delta t \leq O(h_\theta^2),$$

lo que sugiere utilizar esquemas de integración temporal lo más estables posible para evitar fuertes restricciones sobre Δt . En este sentido, la integración en tiempo de (41) se puede realizar con métodos implícitos, donde la desventaja inicial de la amplitud de banda correspondiente a las matrices de la parte lineal de $N(\bar{T}_f)$, se puede compensar reordenando los cálculos en la dirección del flujo de entrada a salida, ya que los términos asociados a los residuos en cada celda aparecen descentrados en esa dirección.

La h_θ^2 -convergencia del método se puede comprobar en Durany-Pereira-Varas [5] a partir de comparaciones de soluciones numéricas con soluciones exactas de algunos ejemplos.

5. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA TÉRMICO EN EL COJINETE

La resolución numérica del problema térmico (20)-(22) en el cojinete se reduce a resolver la ecuación de Laplace en un dominio con condiciones de frontera. Este tipo de problemas es posible abordarlo empleando el método de elementos de contorno (BEM) con un coste computacional muy reducido.

La formulación clásica del método BEM consiste en la discretización de la frontera del dominio en elementos

$$\Gamma_c = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j$$

y sustituir la función incógnita, $u = T_c$, y su derivada normal, $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$, en cada elemento Γ_j por unas funciones discretizadas:

$$u_j = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} u_{j\alpha} \quad ; \quad q_j = \frac{\partial u_j}{\partial \bar{n}} = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} q_{j\alpha}$$

donde α son los puntos considerados dentro del elemento Γ_j , las φ_{α} son las funciones de base dentro del elemento y $u_{j\alpha}, q_{j\alpha}$ son, respectivamente, los valores de la función y de su derivada normal en el punto α del elemento Γ_j . De manera que utilizando la formulación débil del problema y las correspondientes fórmulas de Green, que dan lugar a integrales de frontera, se puede plantear una serie de ecuaciones, una por cada punto de dicha frontera, y agruparlas en una expresión matricial:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{q} \tag{42}$$

donde \mathbf{u} es el vector de valores de la función u en los nodos y \mathbf{q} el vector de las derivadas $\frac{\partial u}{\partial \bar{n}}$ en los nodos. De modo que conocida una de las variables, \mathbf{u}, \mathbf{q} , se puede obtener fácilmente la otra (ver Kythe [9] o similar para los detalles).

En este caso, se supondrán conocidos los flujos y se calcularán las temperaturas. Para ello, la formulación del BEM se realizó empleando una discretización de la

frontera, tanto interna como externa, mediante elementos P_1 . Se considera que el cojinete no presenta deformación y los círculos interno y externo se dividen regularmente en arcos, donde los puntos de la discretización serán sus vértices. En la frontera interna, de contacto con el fluido, la discretización impone que los nodos coincidan con nodos de la malla empleada en el cell-vertex. En la frontera externa se toma un número de nodos igual o inferior al empleado en la frontera interna.

Así, la resolución numérica del problema térmico en el cojinete implica los siguientes pasos:

1) Construcción inicial de las matrices A y B mediante integración numérica de sus coeficientes. Los nodos se ordenan de forma que los primeros correspondan a la cara en contacto con el fluido en orden creciente de ángulo, y los siguientes sean los de la cara en contacto con el aire, también en ángulo creciente. De esta forma se cumple que:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

donde los subíndices 1 y 2 indican la frontera interna y la externa, respectivamente.

2) Introducción de las condiciones de contorno en las matrices. El acoplamiento con el fluido lubricante impondrá las condiciones Neumann (22) en la frontera interna, mientras que el lubricante tiene condiciones Dirichlet. Es decir, el campo de temperatura del fluido servirá para calcular los valores de q_1 , mientras que los valores que se calculen de u_1 se le imponen al fluido lubricante en contacto con el cojinete. Por otra parte, en la frontera externa se relaciona el flujo con la temperatura mediante la condición de Robin (21). Así, se tiene:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \\ &B \begin{pmatrix} q_1 \\ -\frac{h_a}{k_c}(u_2 - T_a) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{43}$$

Haciendo las transformaciones adecuadas se reescribe el sistema en la forma:

$$\tilde{A}u = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} + \frac{h}{k_c} B_{12} \\ A_{21} & A_{22} + \frac{h}{k_c} B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} q_1 \\ \frac{h_a}{k_c} T_a \end{pmatrix} = B\tilde{q}. \quad (44)$$

3) La resolución final se realiza mediante un procedimiento pseudoevolutivo:

$$m \frac{u(n+1) - u(n)}{\Delta t} = -\tilde{A}u(n) + B\tilde{q}(n). \quad (45)$$

Es decir, para la temperatura incógnita, T_c , se tiene:

$$T_c(n+1) = \left(I + \frac{\Delta t}{m} \tilde{A} \right) T_c(n) + \left(\frac{\Delta t}{m} B \right) \tilde{q}(n), \quad (46)$$

donde m es un coeficiente de masa ficticio y el paso de tiempo es el mismo que en la resolución pseudotemporal del problema térmico en el fluido.

Para la construcción de las matrices A y B del BEM con elementos de contorno de tipo P_1 es necesario evaluar los valores de a_{ij}^α y b_{ij}^α para cada punto i , cada arco de la frontera Γ_j y cada función de base φ_α dentro del arco:

$$a_{ij}^\alpha = \int_{\Gamma_j} \varphi_\alpha \frac{\partial w_i}{\partial n} d\Gamma \quad ; \quad b_{ij}^\alpha = \int_{\Gamma_j} \varphi_\alpha w_i d\Gamma \quad (47)$$

donde w_i es la solución fundamental de la ecuación de Laplace con la fuente puntual situada en el punto i :

$$w_i = \frac{-1}{2\pi} \ln(r) \quad (48)$$

siendo r la distancia entre el punto i y aquel en que se evalúa la función.

Una vez determinado el número de puntos a emplear, se utiliza una tabla de pares punto y peso de cuadratura (x_k, ω_k) . Se calculan los valores de ω_i , $\frac{\partial \omega_i}{\partial n}$ y φ_α en los puntos de cuadratura y se procede a realizar las sumas ponderadas correspondientes:

$$a_{ij}^\alpha = \int_{\Gamma_j} \varphi_\alpha \frac{\partial w_i}{\partial n} d\Gamma \approx \frac{1}{L_j} \sum_{k=1}^{n_p} \omega_k \varphi_\alpha(x_k) \frac{\partial w_i}{\partial n}(x_k) \quad (49)$$

$$b_{ij}^\alpha = \int_{\Gamma_j} \varphi_\alpha w_i d\Gamma \approx \frac{1}{L_j} \sum_{k=1}^{n_p} \omega_k \varphi_\alpha(x_k) w_i(x_k) \quad (50)$$

Aquellos casos en que el punto i coincide con uno de los extremos del arco Γ_j tienen que ser tratados de otra forma. En esos casos, ω_i y su derivada alcanzan valor infinito en un extremo del arco, con lo que la integración numérica se complica. Se han desarrollado y estudiado las expresiones analíticas correspondientes a esas integrales para eliminar la singularidad.

Si comparamos el método de elementos de contorno (BEM) con el ampliamente utilizado método de elementos finitos (FEM), encontramos que una de las ventajas es que no precisa discretizar todo el dominio, sólo las fronteras, y los sistemas a resolver son de menor dimensión. Además, estos sistemas suelen estar mejor condicionados, lo que facilita la resolución. Sin embargo, también existen algunos inconvenientes. Por ejemplo, las matrices que se obtienen en la formulación del BEM son llenas, frente a las matrices dispersas que se obtienen de la formulación con elementos finitos y, por otra parte, los coeficientes a_{ij}^α y b_{ij}^α no suelen ser evaluables analíticamente y, por regla general, se recurre a la integración numérica.

El método de elementos de contorno determina los valores de la función solución únicamente en la frontera. Determinar el valor de la solución en puntos internos a partir de los datos de la frontera es posible, pero obliga a calcular por integración numérica una serie de coeficientes por cada punto interno. Por tanto, el método BEM es adecuado para resolver aquellos problemas en que lo importante es lo que sucede en las fronteras del dominio, como es este caso del cojinete.

6. SOLUCIÓN TÉRMICA EN EL EJE Y ACOPLAMIENTO GLOBAL

La ecuación (23), para la térmica del eje, indica que el calentamiento o enfriamiento que experimenta el eje se corresponde con el balance entre el calor recibido del fluido y el calor cedido al ambiente por convección. La resolución efectiva de este problema se plantea también de forma pseudotemporal, análogamente al problema en el fluido y en el cojinete:

$$\omega_e I \frac{dT_e}{dt} = q_e - h_e(T_e - T_a), \quad (51)$$

donde

$$q_e = \int_{\Gamma_e} k_f \frac{T_0}{Ch} \frac{d\bar{T}_f}{dy} dl \quad (52)$$

es el flujo de calor que viene del fluido a temperatura \bar{T}_f , ω_e un coeficiente de masa ficticio e I la matriz identidad.

Finalmente, el esquema global de resolución del problema termohidrodinámico acoplado consiste en una estrategia de punto fijo en presión y temperatura. Así, para una temperatura inicial conocida en todo el dispositivo, se calcula la viscosidad en (8) y se resuelve el problema hidrodinámico (3)-(6). Posteriormente, conocidas la presión y concentración, se actualizan las velocidades (16) y el término de generación (18) y se resuelve el problema térmico (41) en el fluido. Conocida la temperatura del fluido, \bar{T}_f , se pueden calcular los flujos térmicos

con el eje, q_e , y con el cojinete, q_l , y es posible resolver explícitamente las ecuaciones térmicas (46) y (51) en el cojinete y eje, respectivamente.

Este proceso se repite sucesivamente hasta alcanzar el estado de equilibrio.

7. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Con el objetivo de verificar las buenas propiedades y el acoplamiento de los diferentes métodos numéricos desarrollados, se presentan algunos ejemplos con datos reales de lubricantes y pares eje-cojinete. Para ello, se considera una malla uniforme de 100 nodos en el intervalo $\Omega_l = [0, 2\pi]$ y una malla estructurada 100×16 de volúmenes finitos para el dominio del fluido lubricante $\Omega_f = [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Además, se han utilizado los siguientes parámetros físicos y geométricos:

Geometría eje-cojinete:

$$\begin{aligned} R_a &= 36 \text{ mm (radio eje)} \\ C &= 0.036 \text{ mm (diferencia radios)} \\ R_c &= 72 \text{ mm (radio exterior cojinete)} \\ \omega &= 5000 \text{ rpm (velocidad rotación)} \end{aligned}$$

Parámetros del lubricante:

$$\begin{aligned} c_f &= 2083 \text{ J/Kg K (calor específico)} \\ \rho_f &= 840 \text{ Kg/m}^3 \text{ (densidad)} \\ T_0 &= 313 \text{ K (temperatura ref., } 40^\circ\text{C)} \\ k_f &= 0.14 \text{ W/m K (conductividad)} \\ \beta &= 0.0352 \text{ K}^{-1} \text{ (thermoviscosidad)} \\ \mu_0 &= 0.0813 \text{ Kg/m s (viscosidad ref.)} \end{aligned}$$

Parámetros del gas:

$$\begin{aligned} c_a &= 1006 \text{ J/Kg K (calor específico)} \\ \rho_a &= 1.17 \text{ Kg/m}^3 \text{ (densidad)} \\ k_a &= 0.026 \text{ W/m K (conductividad)} \end{aligned}$$

Parámetros del cojinete:

$$\begin{aligned} k_c &= 50 \text{ W/m K (conductividad)} \\ T_a &= 313 \text{ K (temperatura ambiente)} \\ h_a &= 150 \text{ W/m}^2 \text{ K (convección al aire)} \\ m &= 500 \text{ (coeficiente masa)} \end{aligned}$$

Parámetros del eje:

$$\begin{aligned} k_e &= 50 \text{ W/m K (conductividad)} \\ \omega_e &= 50 \text{ (coeficiente masa)} \\ h_e &= 150 \text{ W/m}^2 \text{ K (convección al aire)} \end{aligned}$$

Parámetros numéricos:

$$\begin{aligned} k &= h = 0.0625 \text{ (paso tiempo hidro)} \\ \Delta t &= 0.1 \text{ (paso tiempo térmico)} \end{aligned}$$

$\varpi = 1.8 \lambda = 0.27$ (parámetros dualidad)
 $tol = 10^{-4}$ (error relativo)

En un primer ejemplo, se considera solamente el problema hidrodinámico (3)-(6) y la ecuación térmica (19) en el fluido para comprobar la influencia térmica, así como el comportamiento del esquema de volúmenes finitos. Para ello, se completa la ecuación de la energía con condiciones de contorno adimensionalizadas de tipo Dirichlet $\bar{T}_f = 1$ en la ranura de alimentación ($\theta = 0$), y en las fronteras superior e inferior del dominio ($\bar{y} = 1, \bar{y} = 0$), respectivamente. No es necesario imponer condición de contorno sobre la frontera derecha de salida del flujo.

Las Figuras 1 y 2 muestran la comparación entre la presión isoterma y la obtenida en el problema acoplado termohidrodinámico. En ambos casos de excentricidad, $\varepsilon = 0.6$ y $\varepsilon = 0.9$, con concentraciones de alimentación a la entrada de $\varrho_0 = 0.3, \varrho_0 = 0.06$, respectivamente, la presión adimensionalizada isoterma es lógicamente mayor que la afectada por la térmica del proceso. Las concentraciones y, por tanto, las zonas cavitadas son similares. Para las mismas excentricidades, en la Figura 3 están las temperaturas del fluido en grados $^{\circ}C$, calculadas con el método de volúmenes finitos sin disipación adicional. Las oscilaciones que aparecen en el caso de extrema excentricidad se deben al mínimo efecto suavizante del método.

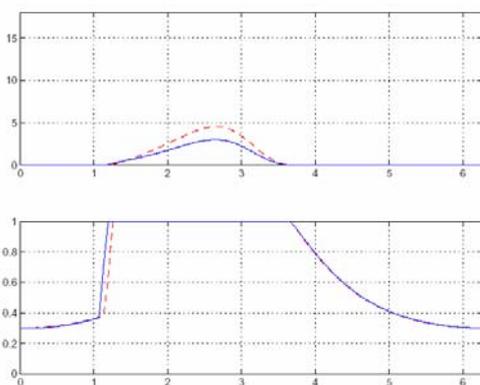


Fig 1: Presión y concentración para $\varepsilon=0.6$ (dicontinuo: solución isoterma)

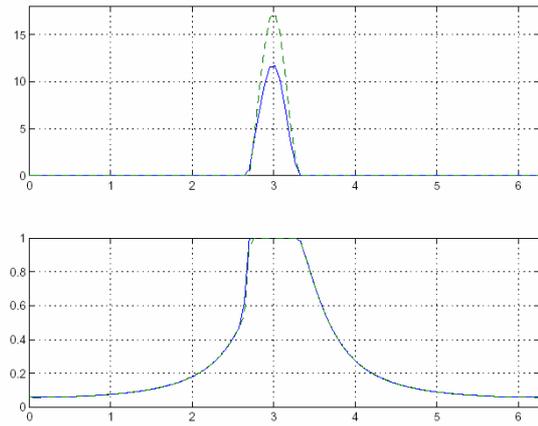


Fig 2: Presión y concentración para $\varepsilon = 0.9$ (dicontinuo: solución isoterma)

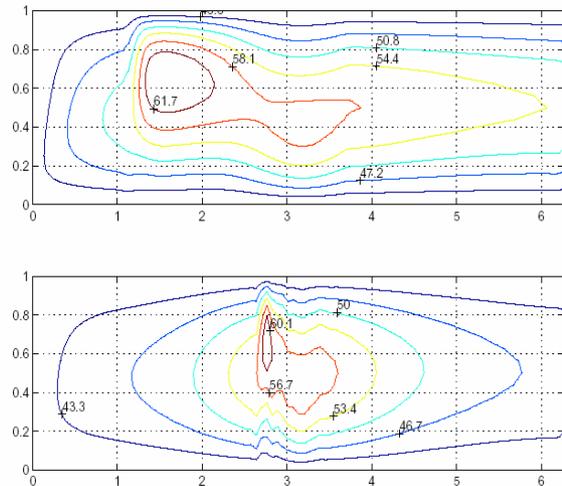


Fig 3: Temperatura fluido ($^{\circ}C$) sin disipación adicional para $\varepsilon = 0.6$ y $\varepsilon = 0.9$.

Precisamente, la influencia del término de disipación adicional de cuarto orden se observa en la Figura 4, donde se han suavizado las oscilaciones en las zonas de fuertes gradientes de temperatura pero en menor medida que la gran disipación causada por un método de elementos finitos de orden uno, como se ve en la figura.

En un segundo ejemplo, se resuelve el problema global incluyendo la térmica del eje y cojinete. En este caso, se imponen condiciones de contorno de tipo periódico en las fronteras de entrada y salida del fluido, para la ecuación térmica del lubricante, y una concentración de alimentación $\varrho_0 = 0.07$, con $\varepsilon = 0.9$. La Figura 5 muestra la influencia que ejerce la térmica del cojinete y eje en la temperatura del fluido. Además, en la Figura 6 se presentan las presiones y concentraciones

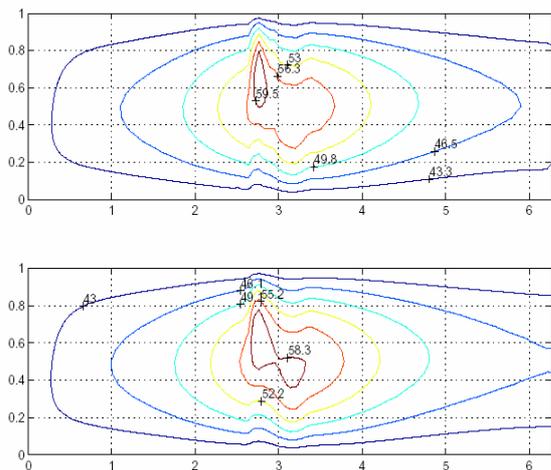


Fig 4: Temperatura fluido (° C) para $\epsilon = 0.9$ con volúmenes finitos más disipación de 4 orden y con FEM de primer orden.

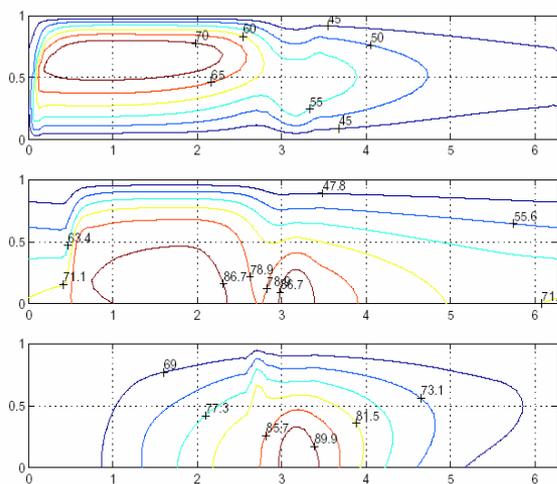


Fig 5: Temperatura fluido (° C) para $\epsilon = 0.9$, considerando: sólo fluido, fluido-cojinete, fluido-cojinete-eje

en los tres casos (sólo fluido, fluido-cojinete, y fluido-cojinete-eje). Finalmente, en la Figura 7 se puede observar un detalle de la temperatura interior y exterior del cojinete calculada con elementos de contorno (los primeros 100 puntos se corresponden con nodos interiores y los otros 100 con los exteriores).

Desde una perspectiva computacional, el método numérico global que se presenta es muy rápido y robusto. El número de iteraciones que realiza el algoritmo de punto fijo que acopla los distintos problemas oscila en torno a 20 para errores relativos menores que 10^{-4} , y el correspondiente a los algoritmos pseudo-

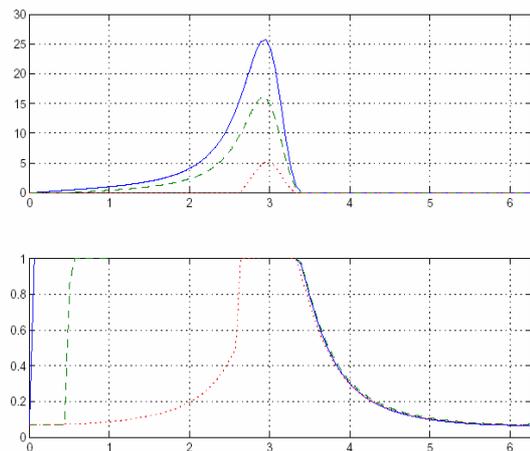


Fig 6: Presión y concentración para $\epsilon = 0.9$ (fluido: continuo, fluido-cojinete: líneas, fluido-cojinete-eje: puntos)

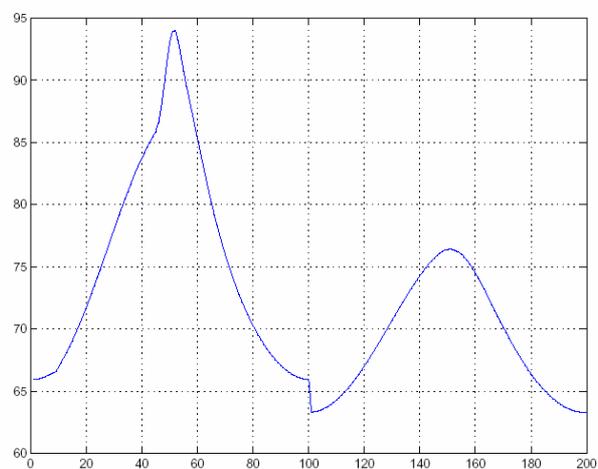


Fig 7: Temperatura interior y exterior del cojinete (° C) para $\epsilon = 0.9$

temporales de volúmenes finitos y elementos de contorno oscila en torno a 300. Además, en la mayor parte de los test realizados en un Pentium 4 con 2.4 GHz el tiempo utilizado ha sido de 30 a 60 segundos, en el peor de los casos.

8. CONCLUSIONES

En este trabajo se describe una combinación de métodos numéricos para la resolución de problemas termo-hidrodinámicos en lubricación de pares eje-cojinete. Por una parte, hay que destacar la dificultad del modelo matemático acoplado no lineal, incluyendo fronteras libres, y la simplicidad de los algoritmos numéricos empleados para resolverlo. En concreto, la utilización de un método de volúmenes

finitos de orden dos, en el cálculo de la temperatura del fluido, representa un paso importante para obtener mejores aproximaciones con costes computacionales menores o similares a los esquemas de primer orden. Además, el tratamiento de la térmica en el cojinete con un método de elementos de contorno, junto a la simetría del problema, simplifica notablemente esta etapa del cálculo en el dispositivo. Finalmente, la técnica pseudotemporal para resolver los problemas discretizados estacionarios permite extender fácilmente los algoritmos numéricos descritos a la resolución de problemas transitorios.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto MTM2004-05796-C02-2 del MEC de España, incluyendo fondos FEDER (UE).

REFERENCIAS

- [1] N. Calvo, J. Durany, C. Vázquez . Comparación de algoritmos numéricos en problemas de lubricación hidrodinámica con cavitación en dimensión uno, *Rev. Int. de Mét. Num. para Cál. y Dis. en Ing.*, 13, N.2, (1997), 185-209 .
- [2] L. Costa, A. S. Miranda, M. Fillon, J. C. P. Claro. An analysis of influence of oil supply conditions on the thermohydrodynamic performance of a single-groove journal bearing. En: *Proceedings of the I MECH E Part J Journal of Engineering Tribology*, 217, N.2, (2003), 133-144.
- [3] R.E. Ewing, H. Wang. Summary of numerical methods for time-dependent advection-dominated partial differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 128, (2001), 423-445.
- [4] J. Durany, G. García, C. Vázquez. Numerical simulation of a lubricated hertzian contact problem under imposed load. *Finite Elem. in Anal. and Design* , 38, (2002), 645-658.
- [5] J. Durany, J. Pereira, F. Varas. A cell-vertex finite volume method for thermohydrodynamic problems in lubrication theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* (en prensa).
- [6] J. Frene, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, M. Godet. *Lubrification hydrodynamique*, Eyrolles, Paris, (1990).
- [7] B. Kucinski, M. Fillon, J. Frene, M. Pascovici. A transient thermo-elastohydrodynamic study of steadily loaded plain journal bearings using finite element method analysis. *ASME J. Tribol.*, 122, (2000), 219-226.
- [8] M. Fillon, J. Bouyer. Thermo-hydrodynamic analysis of a worn plain journal bearing. En: *Proc. of 6th International Tribology Conference-AUSTRIB'02*, Perth, Australia, (2002), 391-398.
- [9] K. Kythe. *An Introduction to Boundary Element Methods*. CRC Press , (1995).
- [10] K. Mer. Variational analysis of a mixed element-volume scheme with fourth-order viscosity on general triangulations. *Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg.*, 153, (1998), 45-62.
- [11] K.W. Morton. *Numerical solution of convection-diffusion problems*. Applied Mathematics and Mathematical Computation, 12, Chapman and Hall, (1996).
- [12] K.W. Morton, M. Stynes, E. Suli. Analysis of a cell-vertex finite volume method for convection-diffusion problems. *Math. of Comput.*, 66, N.220, (1997), 1389-1406.
- [13] R.S. Paranjpe, T. Han. A Study of the thermohydrodynamic performance of steadily loaded journal bearings. *ASME J. Tribol.*, 37, (1994), 679-690.
- [14] R.S. Paranjpe, T. Han. A transient thermohydrodynamic analysis including mass conserving cavitation for dynamically loaded journal bearings . *ASME J. Tribol.*, 117, (1995), 369-378.
- [15] C. Zhang, Z. Yi, Z. Zhang. THD analysis of high speed heavily loaded journal bearings including thermal deformation, mass conserving cavitation and turbulent effects. *ASME J. Tribol.*, 122, (2000), 597-602.