

ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS DO ENSAIO DCB APLICADO À MADEIRA DE *PINUS PINASTER* AIT.

Ribeiro, P.¹; Silva, M. A. L.²; Morais, J. L.²; de Moura, M. F. S. F.³

¹IPB, Dep. de Mecânica Aplicada, Campus de Sta. Apolónia, 5301-854 Bragança, Portugal, pribeiro@ipb.pt

²CETAV/UTAD, Dep. de Engenharias, Quinta de Prados, 5000-911 Vila Real, Portugal, jmorais@utad.pt

³FEUP/DEMEGI, R. Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal, mfmoura@fe.up.pt

RESUMO

Neste trabalho é efectuada uma análise por elementos finitos do ensaio DCB (Double Cantilever Beam), recorrendo ao código ABAQUS® e a um elemento finito de interface que inclui um modelo de propagação de dano, com vista à caracterização do comportamento à fractura da madeira de Pinus pinaster Ait., em modo I e para o sistema de propagação RL. Os resultados da simulação numérica permitiram validar a geometria do provete, bem como a aplicação da Teoria das Vigas Corrigida para a obtenção da taxa crítica de libertação de energia a partir das grandezas experimentais.

1. INTRODUÇÃO

A madeira é um material ortotrópico, com três planos de simetria da sua estrutura anatómica, definidos pela direcção longitudinal (L) das fibras, pela direcção radial (R) dos anéis de crescimento e pela direcção tangencial (T) aos anéis de crescimento. Para as aplicações estruturais é essencial conhecer o comportamento à fractura da madeira, caracterizado pelas taxas de libertação de energia em modo I (G_I), em modo II (G_{II}) e em modo III (G_{III}). O carácter ortotrópico da madeira exige o conhecimento, para cada um dos modos de rotura mencionados, das taxas críticas de libertação de energia para os sistemas de propagação LR, LT, RT, RL, TL e TR, indicando a primeira letra a direcção normal ao plano da fenda e a segunda letra a direcção de propagação (Smith, 2003).

O ensaio DCB (*Double Cantilever Beam*) tem sido usado para a determinação

da taxa crítica de libertação de energia em modo I (G_{Ic}), da madeira e de juntas coladas em madeira (Gagliano, 2001). Neste trabalho é apresentada uma simulação por elementos finitos do ensaio DCB, com vista à caracterização do comportamento à fractura da madeira de pinho (*Pinus pinaster* Ait.) em modo I e para o sistema de propagação RL. Para o efeito recorreu-se ao código comercial ABAQUS® e a um elemento finito de interface que inclui um modelo de propagação de dano (de Moura, 1997; Gonçalves, 2000). Os objectivos centrais dessa simulação são: validar a geometria do provete e examinar a aplicabilidade da Teoria das Vigas Corrigida (TVC) para o tratamento dos resultados experimentais, com vista à obtenção da taxa crítica de libertação de energia (G_{Ic}).

2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 O ensaio DCB e a Teoria das Vigas Corrigida

No ensaio DCB são empregues provetes paralelepípedicos (Figura 1), dotados de uma fenda inicial com comprimento a_0 . Nas extremidades do provete é aplicada uma força F , que provoca a variação $a-a_0$ do comprimento da fenda inicial. A configuração do provete e a estrutura anatómica da madeira apenas permite que o ensaio DCB seja utilizado na determinação da taxa de libertação de energia para os sistemas de propagação RL e TL (Figura 2).

As grandezas básicas medidas no decorrer do ensaio DCB são pois a força F e o comprimento de fenda a , além do deslocamento relativo δ dos pontos de aplicação da força. A partir dessas grandezas determina-se a taxa de libertação de energia, recorrendo à equação de Irwin-Kies (Anderson, 1991):

$$G = \frac{F^2}{2B} \frac{dC}{da} \quad (1)$$

onde B é a largura do provete e C é a flexibilidade,

$$C = \frac{\delta}{F} \quad (2)$$

Admitindo que cada braço do provete se comporta como uma viga encastrada, na extremidade livre da qual está aplicada a força F , a teoria das vigas de Bernoulli-Euler fornece a seguinte expressão aproximada para a flexibilidade:

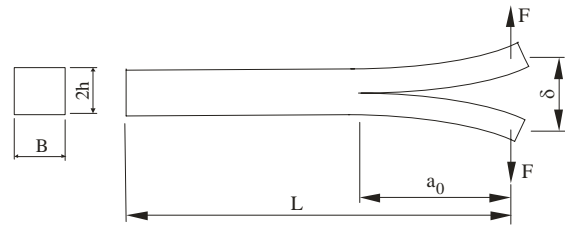


Fig. 1 – Ensaio DCB (Double Cantilever Beam).

$$C = \frac{2a^3}{3EI}, \quad (3)$$

sendo E o módulo de elasticidade e I o momento estático de 2ª ordem da secção transversal de cada braço do provete.

Williams (1989) mostrou que os efeitos do esforço de corte, bem como o facto do encastramento dos braços do provete DCB não ser perfeitamente rígido, podem ser contemplados considerando, no lugar do comprimento de fenda a , o comprimento de fenda equivalente $a+\Delta$:

$$C = \frac{8(a + \Delta)^3}{EBh^3}. \quad (4)$$

Tratando cada braço do provete DCB como uma viga assente numa fundação elástica, Kanninen (1973) obteve a seguinte expressão analítica para a correcção Δ :

$$\Delta_t = h \sqrt{\frac{E_1}{11G_{12}}} \sqrt{3 - 2 \left(\frac{1.18 \sqrt{E_1 E_2}}{G_{12} + 1.18 \sqrt{E_1 E_2}} \right)^2}. \quad (5)$$

Em alternativa à solução analítica (equação 5), a correcção Δ pode ser obtida a partir dos resultados experimentais, por regressão linear da relação $C^{1/3} - a$, como se depre-

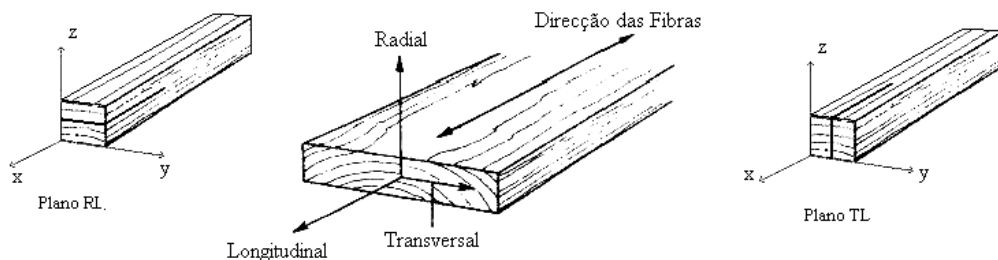


Fig. 2 – Provetes DCB para os sistemas de propagação RL e TL.

ende da equação (4):

$$C^{1/3} = C_1 a + C_0 \quad (6)$$

onde C_0 e C_1 são os parâmetros da regressão. É evidente que:

$$|\Delta_e| = \frac{C_0}{C_1} \quad (7)$$

Como forma de controlo da validade da Teoria das Vigas Corrigida, é usual determinar o módulo de elasticidade através da seguinte equação, obtida a partir das equações (2) e (4):

$$E = \frac{8F(a + \Delta)^3}{\delta B h^3} \quad (8)$$

devendo o resultado não variar com o comprimento de fenda e ser igual ao obtido por um ensaio independente.

Substituindo a equação 4 na equação 1, obtém-se a seguinte equação para a taxa de libertação de energia:

$$G_I = \frac{12F^2(a + \Delta)^2}{EB^2 h^3}. \quad (9)$$

Uma vez que o módulo de elasticidade de um dado provete é desconhecido, há todo o interesse em exprimir a taxa de libertação de energia directamente à custa das grandezas experimentais. Assim, usando as equações 2 e 4 para eliminar E na última equação, resulta que:

$$G_I = \frac{3F\delta}{2B(a + \Delta)}. \quad (10)$$

A Teoria das Vigas Corrigida assume que antes da propagação, a curva F - δ é linear, sendo dada por (equações 2 e 4):

$$F = \frac{EBh^3}{8(a_0 + \Delta)^3} \delta. \quad (11)$$

Por outro lado, eliminando $a + \Delta$ entre as equações 4 e 9 obtém-se a seguinte relação entre F e δ , válida durante a propagação:

$$F = \sqrt[4]{B(EG_I^3 h^3 / 27)} / \sqrt{\delta}. \quad (12)$$

2.2 Teoria do elemento finito de interface

Para modelar a iniciação e a propagação do dano foram utilizados elementos finitos de interface para problemas bidimensionais, com 6 nós (Figura 3), compatíveis com os elementos planos de 8 nós incluídos no software ABAQUS® (Moura, 1997; Gonçalves, 2000). A formulação do elemento de interface é baseada na teoria de contacto, tendo sido usado o método da função penalidade.

O vector dos deslocamentos relativos entre pontos homólogos pode ser obtido a partir do campo de deslocamentos associado às faces do elemento (superior e inferior):

$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_I \\ \delta_{II} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_I \\ u_{II} \end{Bmatrix}_{\text{sup}} - \begin{Bmatrix} u_I \\ u_{II} \end{Bmatrix}_{\text{inf}} \quad (13)$$

sendo I a direcção normal e II a direcção tangencial. As tensões resultantes dos deslocamentos relativos definidos acima são dadas por:

$$\sigma = \mathbf{D}\delta, \quad (14)$$

onde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_I & 0 \\ 0 & d_{II} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

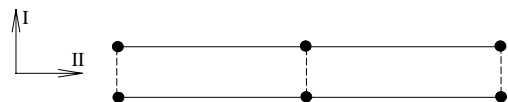


Fig. 3 – Elemento de interface.

Os parâmetros d_i ($i = I, II$) representam respectivamente, a rigidez normal e ao corte da interface. As suas unidades são N/m^3 e a sua escolha tem em consideração que: (1) valores baixos originam grandes interpenetrações, incompatíveis com a realidade física; (2) valores elevados

produzem instabilidades numéricas relacionadas com a precisão do computador. Assim, os valores óptimos dos parâmetros de rigidez são os valores mais elevados que não originam problemas numéricos. Na maioria dos problemas estruturais, valores de 10^6 a 10^8 N/m³ originam boas soluções.

O elemento de interface é introduzido no software ABAQUS[®] através da ferramenta disponível para tal (USER SUBROUTINES), e é compatibilizado com o elemento finito bidimensional de 8 nós.

Quando as tensões num ponto satisfazem o critério de rotura adoptado, o processo de rotura deve ser gradual pois a anulação abrupta das tensões provoca instabilidades numéricas. Fisicamente, isto significa que a rotura não ocorre instantaneamente e que a energia associada se dissipa com o crescimento da fenda. Isto é feito considerando um Modelo de Dano (Dávila *et al*, 2001), baseado no uso indirecto da Mecânica da Fractura, através de uma relação de relaxação das tensões/deslocamentos relativos (Figura 4). Considerando a existência de um único modo de propagação (I ou II), a área definida pela curva tensão/deslocamento relativo pode ser igualada à respectiva taxa crítica de libertação de energia. Como a tensão limite ($\sigma_{u,i}$) e a taxa crítica de libertação de energia (G_{ic}) são propriedades do material determináveis experimentalmente, pode-se obter o deslocamento relativo máximo ($\delta_{u,i}$). Note-se que este processo de rotura gradual é sustentado pelo modo de rotura típico da madeira. De facto, existe uma zona de processo de fractura na extremidade da fenda caracterizada pela existência de nucleação, crescimento e coalescência de microfissuras, onde a energia de rotura se dissipa de uma forma gradual (Smith, 2003).

A equação (14) representa a relação entre tensões e deslocamentos relativos até se atingir a tensão limite ($\sigma_{u,i}$). Os pontos ($\delta_{o,i}$, $\sigma_{u,i}$) e ($\delta_{u,i}$, 0) correspondem à iniciação e rotura completa, respectivamente. A relação de relaxação entre estes dois pontos é dada por:

$$\sigma = (\mathbf{I} - \mathbf{E})\mathbf{D}\delta \quad (16)$$

onde \mathbf{I} representa a matriz identidade e \mathbf{E} é a matriz diagonal, cujos termos são os parâmetros de dano

$$e_i = \frac{\delta_{u,i}(\delta_i - \delta_{o,i})}{\delta_i(\delta_{u,i} - \delta_{o,i})} \quad (17)$$

Nos modos puros (I ou II), a outra componente de tensão é desprezável e pode ser anulada abruptamente igualando a 1 o respectivo elemento da matriz diagonal \mathbf{E} .

Em situações de modo misto I e II a iniciação do dano é prevista recorrendo a um critério quadrático baseado no estado de tensão:

$$\left(\frac{\sigma_I}{\sigma_{u,I}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{II}}{\sigma_{u,II}}\right)^2 = 1, \text{ se } \sigma_I \geq 0$$

ou (18)

$$\sigma_{II} = \sigma_{u,II}, \text{ se } \sigma_I \leq 0$$

assumindo que as tensões normais de compressão não contribuem para o dano.

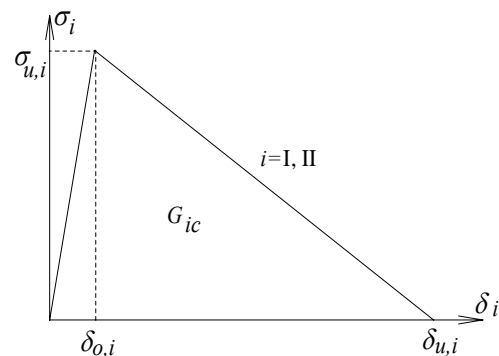


Fig. 4 – Relação tensão/deslocamento para modos puros (I e II).

O modelo de modo misto pode ser considerado uma extensão do modelo de modo puro, uma vez que as equações constitutivas são as mesmas. Todavia, no modo misto os valores limite são inferiores dado que existe uma combinação de solicitações. Considerando o caso de $\sigma_I \geq 0$, começamos por definir um

deslocamento equivalente e um rácio de modo misto, respectivamente:

$$\delta_e = \sqrt{\delta_I^2 + \delta_{II}^2} \quad e \quad \beta = \frac{\delta_{II}}{\delta_I}. \quad (19)$$

Tendo em atenção a equação (14), a primeira das equações (18) pode ser escrita como:

$$\left(\frac{\delta_{om,I}}{\delta_{o,I}} \right)^2 + \left(\frac{\delta_{om,II}}{\delta_{o,II}} \right)^2 = 1 \quad (20)$$

onde $\delta_{om,I}$ e $\delta_{om,II}$ representam os deslocamentos relativos que originam o aparecimento do dano. Substituindo as equações (19) em (20) obtém-se:

$$\delta_{o,e} = \delta_{o,I} \delta_{o,II} \sqrt{\frac{1 + \beta^2}{\delta_{o,II}^2 + \beta^2 \delta_{o,I}^2}} \quad (21)$$

que representa o deslocamento relativo resultante em modo misto, no início do processo de amaciamento. Os deslocamentos correspondentes para cada um dos modos, $\delta_{om,i}$, podem ser obtidos a partir das equações (19) e (21).

Para estabelecer as condições de propagação, recorre-se a um critério energético, baseado nas taxas críticas de libertação de energia, como por exemplo, o critério linear. Assume-se então que o processo de rotura está completo quando:

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} = 1. \quad (22)$$

A energia libertada na rotura completa em cada um dos modos é dada pela área do triângulo menor da Figura 5:

$$G_i = \frac{1}{2} \sigma_{um,i} \delta_{um,i} \quad (23)$$

Considerando as equações (14) e (19) pode-se reescrever as energias em função dos deslocamentos relativos. Substituindo na equação (22) temos:

$$\delta_{u,e} = \frac{1 + \beta^2}{\delta_{o,e} ((\delta_{o,I} \delta_{u,I})^{-1} + \beta^2 (\delta_{o,II} \delta_{u,II})^{-1})} \quad (24)$$

que representa o deslocamento resultante em modo misto correspondente à rotura completa. Usando as equações (19) e (24) os valores $\delta_{um,i}$ podem ser obtidos e, conjuntamente com $\delta_{om,i}$, substituídos na equação (16) para se obter o parâmetro de dano correspondente a cada modo.

3. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Na simulação do ensaio DCB utilizou-se um modelo de elementos finitos bidimensional, recorrendo ao elemento finito de interface com propagação de dano descrito na secção 2.2, e a um elemento plano de 8 nós incluído na biblioteca de elementos do código ABAQUS® (Figura 6). Os elementos de interface foram colocados na zona de propagação da fenda. O modelo empregue é composto por 1191 elementos bidimensionais e por 200 elementos de interface.

As condições de fronteira reproduzem a solitação em vigor nos ensaios experimentais, executados com controlo do deslocamento. O deslocamento foi aplicado de forma incremental, com acréscimos $\Delta\delta = 0.001$, até ao limite de 10mm. O acréscimo $\Delta\delta$ foi escolhido de forma a evitar a ocorrência de propagação instável.

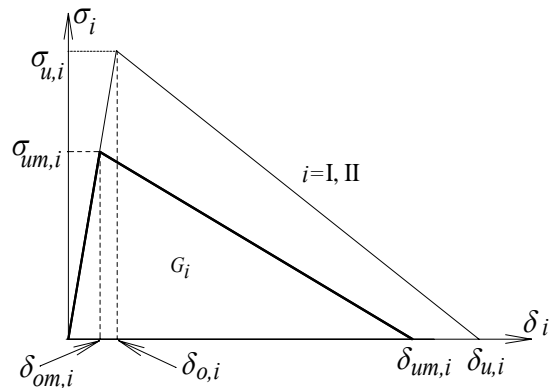


Fig. 5 – Modelo de modo misto I e II.

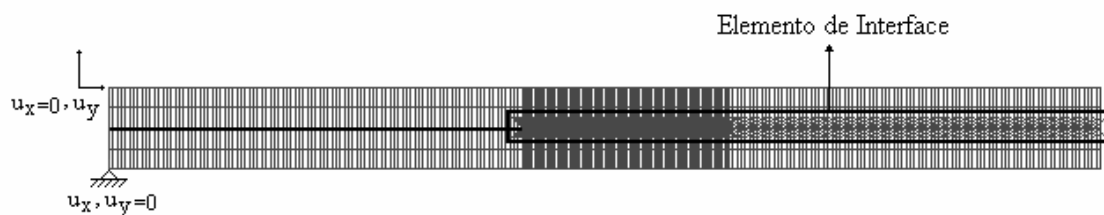


Fig. 6 – Modelo de elementos finitos do ensaio DCB.

Neste trabalho consideramos provetes de madeira de pinho (*Pinus pinaster* Ait.), com as seguintes dimensões (Figura 1): $L = 240$, $B = 20$, $h = 10$ e $a_0 = 100$ (mm). As propriedades mecânicas usadas na simulação são as indicadas na Tabela 1. As propriedades elásticas foram determinadas por Xavier (2003) e Pereira (2003), enquanto que as propriedades de resistência e de fractura foram obtidas por Pereira (2003) e por Caumes (1987), respectivamente.

Tabela 1 – Propriedades mecânicas da madeira de *Pinus pinaster* Ait, no plano de simetria natural LR.

E_L (GPa)	15,1
E_R (GPa)	1,91
ν_{LR}	0,47
G_{LR} (GPa)	1,12
X_R (MPa)	7,93
G_I (J/m ²)	240
G_{II} (J/m ²)	630

4. APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Na figura 7 encontram-se os resultados da simulação numérica do ensaio DCB. As curvas força/deslocamento são não lineares (Figura 7-a), mesmo antes de ser alcançada a força máxima. Esta não linearidade está associada ao desenvolvimento duma Zona de Processo de Fractura na extremidade da fenda inicial e à rotura de alguns pontos. Uma vez atingida a força máxima, observa-se a propagação estável da fenda inicial, acompanhada da diminuição da força F (Figura 7-b), de acordo com a condição de ensaio executado com controlo do

deslocamento.

Com base nos resultados da simulação calculou-se a flexibilidade C (equação 2), verificando-se que a relação $C^{1/3} - a$ é linear (Figura 8), tal como previsto pela Teoria das Vigas Corrigida (equação 6). A correcção Δ_e foi então obtida como se indicou na secção 2.1 (equações 6 e 7), tendo-se chegado ao resultado apresentado na Tabela 2.

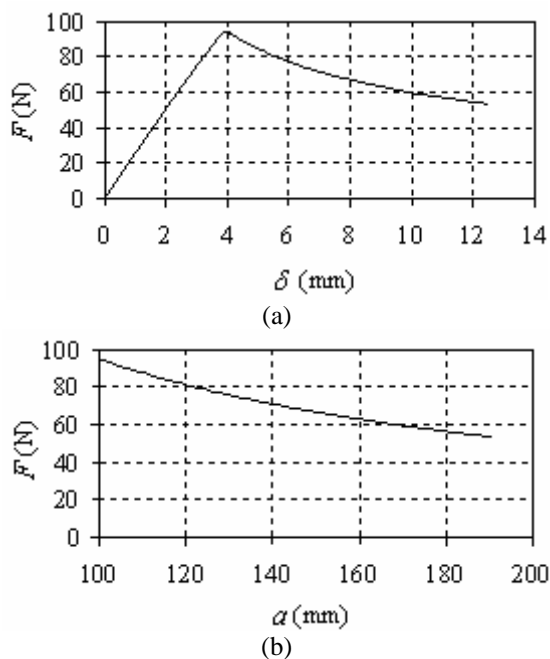


Fig. 7 – Curvas (a) força – deslocamento e (b) força – comprimento de fenda.

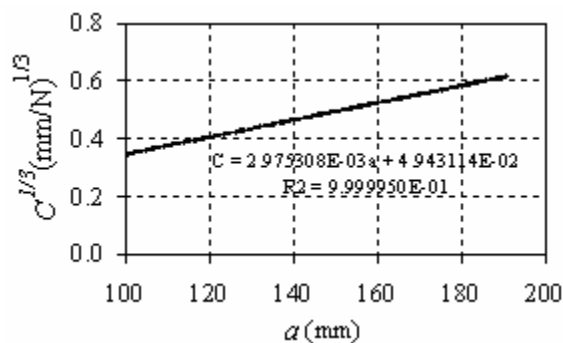


Fig. 8 – Determinação da correcção Δ_e .

O valor teórico da correcção, Δ_t (Tabela 2), é inferior a Δ_e , uma vez que a equação 5 não contempla a existência da Zona de Processo de Fractura na extremidade da fenda. Esta conclusão é suportada pelo facto de Δ_t diferir apenas 1,46% do valor Δ_0 determinado a partir da equação 4, usando o comprimento de fenda inicial ($a_0 = 100\text{mm}$) e a flexibilidade inicial (C_0), obtida a partir da curva $F - \delta$ (Figura 9).

Recorrendo mais uma vez à equação 4, calculou-se o valor de Δ_u correspondente à força máxima (Figura 9 e Tabela 2), o qual está em bom acordo com o valor determinado por regressão linear da relação $C^{-1/3} - a$ (equação 7 e Figura 8). Aliás, esse valor é igual ao obtido através da equação 4, para qualquer comprimento de fenda a (Figura 10).

A diferença entre Δ_u e Δ_0 deve-se ao desenvolvimento da Zona de Processo de Fractura antes da propagação da fenda inicial, estando assim relacionada com a extensão dessa zona:

$$ZPF \approx 1,7(\Delta_u - \Delta_0). \quad (25)$$

É evidente (Figura 10 e equação 25) que a extensão da zona de processo de fractura se mantém inalterada durante a propagação.

Tabela 2 – Correcções Δ e ZPF.

Δ_e (mm)	16,61
Δ_t (mm)	13,86
Δ_0 (mm)	13,66
Δ_u (mm)	16,45
ZPF (mm)	4,75

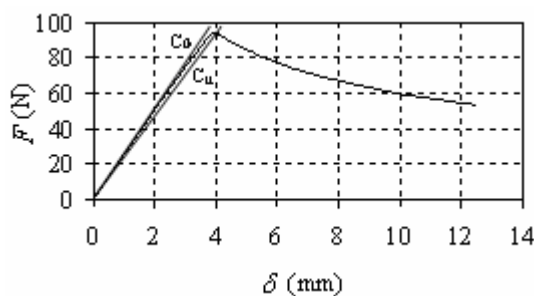


Fig. 9 – Flexibilidade inicial (C_0) e flexibilidade para a força máxima (C_u).

O valor da correcção Δ_e (Tabela 2), juntamente com os valores de F , a e δ , foi usado para calcular a taxa de libertação de energia, usando a equação 10. A Figura 11 mostra que a taxa de libertação de energia se pode considerar constante (independente do comprimento de fenda a) e igual ao valor crítico correspondente ao início da propagação. O valor médio da taxa crítica de libertação de energia assim obtido ($242,89 \text{ J/m}^2$) difere apenas 1,21 % do valor de referência empregue no modelo numérico (240 J/m^2), apresentado na Tabela 1.

A validade da Teoria das Vigas Corrigida está confirmada na Figura 12, onde se representa o módulo de elasticidade longitudinal em função do comprimento da fenda. O módulo de elasticidade foi calculado a partir dos resultados da simulação numérica (F , a e δ), usando a equação (8), constatando-se que é praticamente independente do comprimento da fenda. Além disso, o valor médio obtido ($15,2 \text{ GPa}$) difere apenas 0,66% do valor introduzido no modelo numérico ($15,1 \text{ GPa}$).

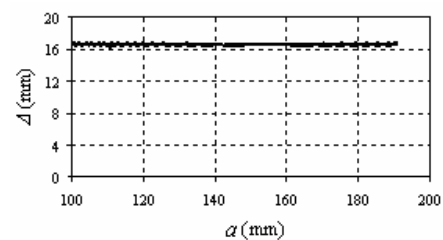


Fig. 10 – Relação entre a correcção Δ e o comprimento da fenda.

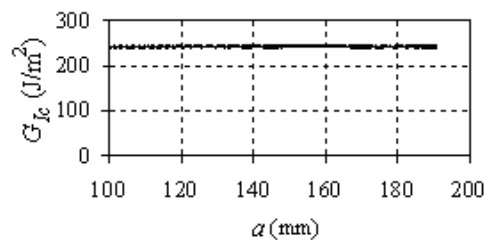


Fig. 11 – Evolução da taxa crítica de libertação de energia com o comprimento da fenda.

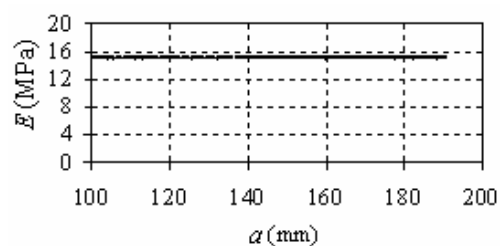


Fig. 12 – Variação do módulo de elasticidade com o comprimento da fenda.

Uma vez determinados os valores de Δ_c , de E e de G_I , as equações 11 e 12 foram empregues para obter a curva $F - \delta$, que na figura 13 é comparada com a curva obtida pelo método dos elementos finitos. Apesar da pequena discrepância que se observa no troço inicial, antes da força máxima, constata-se mais uma vez um bom acordo entre as previsões da Teoria das Vigas Corrigida e os resultados numéricos.

4. CONCLUSÕES

Recorrendo a elementos de interface e a uma lei de dano progressivo, é possível modelar a iniciação e a propagação da fenda no ensaio DCB, para a madeira de *Pinus pinaster* Ait.

Os resultados da simulação numérica mostram que a propagação é estável e em puro modo I. Os referidos resultados mostram também que a Teoria das Vigas Corrigida é válida para a identificação da taxa de libertação de energia em modo I (G_{Ic}), para o sistema de propagação RL da madeira de *Pinus Pinaster* Ait.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação Para a Ciência e a Tecnologia o suporte financeiro para a realização deste trabalho, através do projecto POCTI/EME/45573/2002.

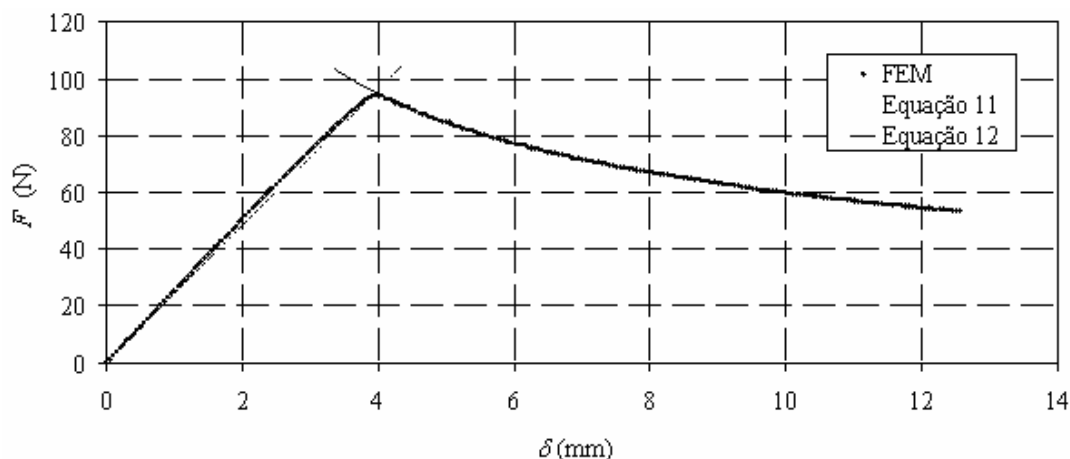


Fig. 13 – Comparação entre as curvas $P-\delta$ numérica e teórica (TVC).

REFERÊNCIAS

- Anderson, T. L., “Fracture mechanics fundamentals and applications”, CRC Press, Inc., 1991.
- Caumes, P., “Rupture d’un matériau anisotrope en conditions polymodales (le bois)”, PhD Thesis, Université de Bordeaux I, France, 1987.
- Dávila, C. G., Camanho, P. P. and Moura, M. F. M., “Mixed-mode decohesion elements for analyses of progressive delamination”, 42nd AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Seattle, Washington, April 16-19 2001, Paper AIAA-01-1486.
- Gagliano, J. M., “An improved method for the fracture cleavage testing of adhesively-bonded wood”, PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 2001.
- Gonçalves, J. P. M., Moura, M. F. S. F., Castro, P. M. S. T. and Marques, A. T., “Interface element including point-to-surface constraints for three-dimensional problems with damage propagation”, Engineering Computations: Int. J. Comp.-Aided Eng. Software, 17, 2000, pp. 28-47.
- Kaninen, M. F., “An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest”, Int. J. Fracture, 9(1), 1973, pp. 83-92.
- Moura, M. F. S. F., Gonçalves, J. P. M., Marques, A. T. and Castro, P. M. S. T., “Modelling compressin failure after low velocity impact on laminated composites using interface elements”, J. Comp. Mat., 31, 1997, pp. 1462-1479.

- Pereira, J. L., “Comportamento mecânico da madeira em tracção nas direcções de simetria material”, Dissertação de Mestrado, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal, 2004 (em preparação).
- Smith, I, Landis, E. and Gong, M., “Fracture and fatigue in Woo”, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England.
- Xavier, J. M., “Caracterização do comportamento ao corte da madeira usando o ensaio de Iosipescu”, Dissertação de Mestrado, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal, 2003.
- Williams, J. G., “End corrections for orthotropic DCB specimens”, *Comp. Sci. Technol.*, 35, 1989, pp. 367-376.