

# DESENVOLVIMENTO DE NOVOS MODELOS PARA A ANÁLISE DE TENSÕES E DE DEFORMAÇÕES EM ESTRUTURAS TUBULARES

Elza M. M. Fonseca<sup>1</sup>; Francisco Q. Melo<sup>2</sup>; Carlos A. M. Oliveira<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Mecânica Aplicada, Instituto Politécnico de Bragança

<sup>2</sup> Secção Autónoma de Engenharia Mecânica, Universidade de Aveiro

<sup>3</sup> Depto. de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto



## RESUMO

*Neste artigo apresentam-se vários modelos numéricos para análise de estruturas tubulares, como uma alternativa aos elementos finitos de casca tradicionalmente utilizados em tais aplicações. Os modelos baseiam-se em diferentes campos de deslocamentos, sendo sumariamente apresentadas as formulações necessárias à sua definição. Mostram-se alguns casos de aplicação em estudo utilizando os modelos desenvolvidos e resultados comparativos experimentais.*

## 1 - INTRODUÇÃO

As estruturas tubulares têm elevada importância tecnológica em aplicações abrangendo variados campos, como é o caso do transporte de fluidos para assegurar conforto nas comunidades (água e aquecimento), produção de energia e processos químicos. As aplicações avançadas como a produção de energia nuclear, a indústria aeronáutica e aeroespacial, estão sujeitas a elevados padrões de segurança impostos tanto na fase do projecto, como na das inspecções a efectuar a este tipo de estruturas. Não só a melhoria no desenho e as soluções construtivas para os componentes de estruturas de tubagens têm contribuído para os progressos verificados no projecto; com efeito, o desenvolvimento de materiais capazes de suportar as mais severas condições de serviço tem importante implicação não só na a redução do custo total do projecto (por economia de peso global, uma vez que a rigidez estrutural seja melhorada) mas também no aumento da segurança e fiabilidade.

A ligação entre os vários componentes de uma tubagem (elementos rectos, curvos, flanges, reservatórios), as adversidades a que estão sujeitos, as altas temperaturas, os carregamentos diversos, o ambiente de exposição, o próprio transporte e a instalação de tubagens, traduz-se numa complexidade para o cálculo do campo de tensões e deformações podendo originar os mais variados problemas. Áreas distintas de actuação como a mecânica dos materiais, a mecânica da fractura, análise de vibrações, entre outras, poderão de alguma forma contribuir para a minimização atempada de algumas ocorrências. A figura 1 representa algumas destas aplicações industriais, de estruturas deste tipo.

Muitos são os autores com relevantes contribuições que se destacam no estudo de acessórios curvos utilizando técnicas analíticas e experimentais, entre outros, [Theodore von Kármán (1911)], [Vigness (1943)], [Cheng e Thailer (1970)] e mais tarde [Thomson (1980)]. Recentemente, novas contribuições utilizando técnicas numéricas, tornaram possíveis estudos mais complexos neste tipo de geometrias,

consideradas como elementos de casca fina e com os problemas decorrentes da ovalização e empenamento quando as estruturas são solicitadas. Salienta-se [Bathe e Almeida (1982)], [Wilczek (1984)], [Melo (1992-1997)] e mais recentemente [Fonseca (2002-2005)].



Fig. 1 - Aplicações industriais de sistemas tubulares.

## 2 – NOVOS MODELOS NUMÉRICOS E MOTIVAÇÃO

Este trabalho representa um conjunto de formulações alternativas na análise e na obtenção de campos de tensão e de deformação em estruturas tubulares consideradas de espessura fina.

Desenvolveram-se elementos finitos baseados na modelação unidimensional de sistemas tubulares, utilizando um campo de deslocamentos resultado da combinação de graus de liberdade para um elemento de viga indeformável e graus de liberdade na capacidade de distorção da secção tubular. Os elementos considerados apresentam duas secções nodais.

São apresentados vários modelos alternativos, com base em diferentes campos de deslocamentos. Utilizam-se polinómios de ordem diferente ou funções trigonométricas, para a modelação dos deslocamentos nos termos de viga indeformável. Estes deslocamentos são combinados com uma solução de termos da série de Fourier, permitindo assim o cálculo de tensões ou deslocamentos na superfície média da casca do elemento tubular.

Os modelos apresentados são denominados da seguinte forma: modelo 5P (utiliza um polinómio de 5ª ordem e desenvolvimento da série de Fourier), modelo 3P (com um polinómio de 3ª ordem e série de Fourier), modelo 1P (polinómio de 1ª ordem e série de Fourier) e um dos mais recentes modelos TF (utiliza funções

trigonométricas e desenvolvimento em série de Fourier), conforme a figura 2, e ainda outro recente elemento *Ring* (que utiliza só funções trigonométricas), como se representa na figura 3.

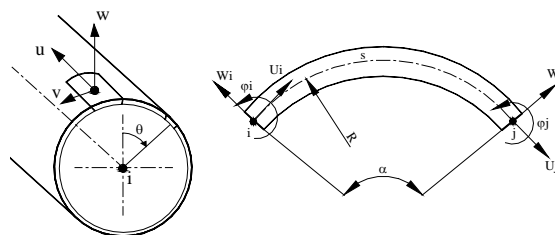


Fig. 2 - Geometria do elemento tubular de 2 nós, para os modelos: 5P, 1P, 3P e TF. Elementos com 19 graus de liberdade por secção.

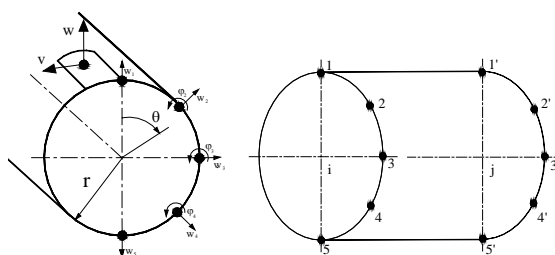


Fig. 3 - Geometria do elemento *Ring* com 5 nós e um total de 8 graus de liberdade por secção.

A motivação associada à utilização destes novos elementos traduz-se num elevado desempenho computacional no que respeita à facilidade da geração de malhas por serem unidimensionais, na simulação das condições de fronteira aplicáveis e na necessidade de malhas pouco refinadas. Tornam possível a determinação de campos de deslocamentos ao longo de uma linha média do elemento e sobre a superfície de uma casca desses elementos. Possibilitam o cálculo de tensões de membrana em qualquer secção recta da estrutura, permitindo ainda verificar os fenómenos de ovalização e empenamento decorrentes em estruturas desta natureza. Estes elementos permitem de uma forma fácil obter resultados comparáveis com outros elementos finitos mais dispendiosos, como é exemplo, os elementos de casca.

A utilização de diferentes polinómios ou funções trigonométricas, na obtenção de campos de deslocamentos destes elementos, traduz-se numa abordagem completa e detalhada de múltiplas e variadas opções disponíveis ao utilizador,

como alternativa, na análise de estruturas tubulares.

### 3 - FORMULAÇÃO

O modelo de deformação utilizado para os modelos 5P, 1P, 3P e TF é relativo a deformações de membrana e a variações de curvatura, conforme referido por [Melo (1992-1997)], [Flügge (1973)], [Kitching (1970)] e [Fonseca (2002-2005)]:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & -\frac{\sin \theta}{R} & \frac{\cos \theta}{R} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (1)$$

onde:  $\varepsilon_{ss}$  é a deformação longitudinal de membrana,  $\gamma_{s\theta}$  a deformação de corte e  $\chi_{\theta\theta}$  é a curvatura meridional associada à ovalização.

Para a formulação 5P, a função utilizada para  $U$  está de acordo com a expressão polinomial seguinte, [Fonseca (2002-2005)]. Os deslocamentos  $W$  e  $\varphi$  são obtidos por derivação sucessiva.

$$\begin{aligned} U_{(s)} &= a_0 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 \\ W_{(s)} &= -\frac{dU}{ds}R = \\ &= -R(a_1 + 2a_2s + 3a_3s^2 + 4a_4s^3 + 5a_5s^4) \\ \varphi_{(s)} &= \frac{dW}{ds} = \\ &= -R(2a_2 + 6a_3s + 12a_4s^2 + 20a_5s^3) \end{aligned} \quad (2)$$

Com base nas condições de fronteira aplicáveis obtêm-se um conjunto de funções de forma:

$$\begin{aligned} U_{(s)} &= \left( (U_i N_{ui} + U_j N_{uj}) + (W_i N_{wi} + W_j N_{wj}) + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi_i N_{\varphi i} + \varphi_j N_{\varphi j}) \right) \\ W_{(s)} &= -R \left( (U_i N'_{ui} + U_j N'_{uj}) + (W_i N'_{wi} + W_j N'_{wj}) + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi_i N'_{\varphi i} + \varphi_j N'_{\varphi j}) \right) \\ \varphi_{(s)} &= -R \left( (U_i N''_{ui} + U_j N''_{uj}) + (W_i N''_{wi} + W_j N''_{wj}) + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi_i N''_{\varphi i} + \varphi_j N''_{\varphi j}) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Na formulação 1P, o campo de deslocamentos é função de polinômios lineares [Melo (1992-1997)].

$$U_{(s)} = a1 + a2s$$

$$W_{(s)} = a3 + a4s$$

$$\varphi_{(s)} = a5 + a6s \quad (4)$$

Com a imposição das condições de fronteira são calculadas as funções de forma:

$$U_{(s)} = U_i N_i + U_j N_j$$

$$W_{(s)} = W_i N_i + W_j N_j$$

$$\varphi_{(s)} = \varphi_i N_i + \varphi_j N_j \quad (5)$$

No modelo 3P, o campo de deslocamentos é linear para  $U$  e de 3ª ordem para  $W$ , [Fonseca (2002-2005)]. A rotação  $\varphi$  obtém-se por derivação.

$$U_{(s)} = a1 + a2s$$

$$W_{(s)} = a3 + a4s + a5s^2 + a6s^3$$

$$\varphi_{(s)} = \frac{\partial W}{\partial s} = a4 + 2a5s + 3a6s^2 \quad (6)$$

Através de condições de fronteira, as funções de forma são lineares para  $U$  e de 3ª ordem para os restantes deslocamentos.

$$U_{(s)} = N_i U_i + N_j U_j$$

$$W_{(s)} = N_1 W_i + N_2 \varphi_i + N_3 W_j + N_4 \varphi_j$$

$$\varphi_{(s)} = \frac{\partial W}{\partial s} = (N_1' W_i + N_2' \varphi_i + N_3' W_j + N_4' \varphi_j) \quad (7)$$

No caso do recente modelo TF, o campo de deslocamento para  $U$  é representado na expressão seguinte e o deslocamento  $W$  é obtido por derivação. A rotação  $\varphi$  é dependente de uma função linear.

$$\begin{aligned} U_{(s)} &= \\ &= a_1 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + a_2 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + a_3 \cos\left(2\frac{s}{R}\right) + a_4 \sin\left(2\frac{s}{R}\right) \\ W_{(s)} &= -R \frac{dU}{ds} = \\ &= a_1 \sin\left(\frac{s}{R}\right) - a_2 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + a_3 2 \sin\left(2\frac{s}{R}\right) - a_4 2 \cos\left(2\frac{s}{R}\right) \\ \varphi_{(s)} &= a5 + a6s \end{aligned} \quad (8)$$

Impondo as condições de fronteira necessárias, obtêm-se as funções de forma para o cálculo dos respectivos deslocamentos:

$$U_{(s)} = (U_i N_1 + U_j N_2) + (W_i N_3 + W_j N_4)$$

$$W_{(s)} = -R((U_i N'_1 + U_j N'_2) + (W_i N'_3 + W_j N'_4))$$

$$\varphi_{(s)} = \varphi_i N_i + \varphi_j N_j \quad (9)$$

O campo de deslocamentos à superfície da casca é obtido por sobreposição de um campo de deslocamentos associado a um tubo de secção circular em que a sua configuração não é alterada conforme estabelecido nas equações anteriores para cada um dos modelos, e em deslocamentos associados ao fenómeno de ovalização e empenamento da secção, conforme solução apresentada por [Thomson (1980)]. Os deslocamentos da superfície, na direcção radial e meridional resultantes unicamente da ovalização, bem como o deslocamento longitudinal resultante do empenamento da secção, são expressos nas seguintes equações:

$$w_{(s,\theta)} = \left( \sum_{n \geq 2} a_n \cos n\theta \right) N_i + \left( \sum_{n \geq 2} a_n \cos n\theta \right) N_j$$

$$v_{(s,\theta)} = \left( - \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n} \sin n\theta \right) N_i + \left( - \sum_{n \geq 2} \frac{a_n}{n} \sin n\theta \right) N_j$$

$$u_{(s,\theta)} = \left( \sum_{n \geq 2} b_n \cos n\theta \right) N_i + \left( \sum_{n \geq 2} b_n \cos n\theta \right) N_j \quad (10)$$

Os termos  $a_n$  e  $b_n$  são constantes a determinar função do desenvolvimento da série de Fourier para os termos de ovalização e devidos ao empenamento.

Sobrepondo este campo de deslocamentos, a cada um dos modelos anteriormente propostos, obtêm-se os deslocamentos à superfície de uma casca:

$$u = U_{(s)} - r \cos \theta \varphi_{(s)} + u_{(s,\theta)}$$

$$v = -W_{(s)} \sin \theta + v_{(s,\theta)}$$

$$w = W_{(s)} \cos \theta + w_{(s,\theta)} \quad (11)$$

O princípio do trabalho virtual torna possível a resolução de um sistema algébrico de equações para obtenção da solução do problema. Desta forma é possível o cálculo do campo de deslocamentos nodais para toda a estrutura em análise. Os deslocamentos nodais são obtidos pela inversão do seguinte sistema de equações:

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (12)$$

O vector força é formado por termos que envolvem forças longitudinais, forças transversais e flexão, ou termos relativos à expansão de Fourier para os deslocamentos de ovalização e empenamento. Os deslocamentos nodais são calculados para cada elemento que possui 19 graus de liberdade: 1 rotação  $\varphi$  e 2 translações  $U$  e  $W$ , 8 de ovalização e 8 de empenamento.

A matriz rigidez linear é calculada efectuando integrações em  $s$  e  $\theta$ , conforme se representa na seguinte expressão:

$$K = [T] \left( \int_s [B]^T [D] [B] dS \right) [T]^T \quad (13)$$

onde  $dS = r ds d\theta$ ,  $[B]$  é a matriz obtida em função do operador diferencial apresentado na eq.1 multiplicado pelas funções de forma,  $[T]$  é a matriz transformação que permite a passagem da matriz  $[K]$  para o sistema global e  $[D]$  é a matriz das constantes elásticas.

No final a matriz de rigidez elementar fica ordenada na forma seguinte, relativa aos termos de viga que possuem rigidez ao corte e restantes termos sem rigidez de corte:

$$K = \begin{bmatrix} K_{Viga} & K_{VigaOvalEmp} & K_{Viga} & K_{VigaOvalEmp} \\ K_{VigaOvalEmp} & K_{OvalEmp} & K_{VigaOvalEmp} & K_{OvalEmp} \\ K_{Viga} & K_{VigaOvalEmp} & K_{Viga} & K_{VigaOvalEmp} \\ K_{VigaOvalEmp} & K_{OvalEmp} & K_{VigaOvalEmp} & K_{OvalEmp} \end{bmatrix} \quad (14)$$

A integração da matriz rigidez é efectuada numericamente na direcção longitudinal do elemento  $s$ , obedecendo a uma integração exacta na direcção meridional  $\theta$ . No uso da integração numérica optou-se em alguns casos pela integração selectiva dos termos da matriz rigidez, sub integrando apenas as parcelas relativas ao corte, evitando assim a sensibilidade ao fenómeno de *locking* quando a integração é completa, conforme se propõe para os vários modelos em estudo na tabela 1.

No caso da formulação 5P pode também ser utilizada uma integração exacta na direcção longitudinal, obtendo-se os mesmos resultados [Fonseca (2002-2005)].

**Tabela 1** – Integração numérica: nº de pontos Gauss

Grau polinómio	Pts. Gauss $K_{viga} (2n-1)$	Pts. Gauss outros termos $K$
5P	3	2
3P	2	2
1P	1	2
TF	1	2

O estado de tensão é definido para cada elemento da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} N_{ss} \\ N_{s\theta} \\ M_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ss} \\ \gamma_{s\theta} \\ \chi_{\theta\theta} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

onde:  $N_{ss}$  é a tensão longitudinal de membrana,  $N_{s\theta}$  a tensão de corte e  $M_{\theta\theta}$  é a tensão de flexão meridional.

Para cascas cilíndricas, em que se considera uma resistência principalmente devida à acção da flexão, associada a uma deformação inextensível da casca, o modelo de deformação pode basear-se num campo de curvaturas e torção, conforme sugerido por [Ugural (1981)] e expresso na seguinte relação, utilizado noutro recente modelo *Ring*.

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \chi_{\theta\theta} \\ \chi_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ -\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial s} & \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial s \partial \theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} \quad (16)$$

onde:  $\chi_{\theta\theta}$  é a curvatura meridional devido à ovalização e  $\chi_{s\theta}$  a variação da torção.

O campo de deslocamento para o elemento *Ring* caracteriza uma ovalização uniforme num tubo e uma variação ao longo do comprimento da casca. As funções de forma foram obtidas em função de deslocamentos na direcção radial.

O elemento *Ring* tem 5 nós por secção. Dada a simetria de carregamento e geometria efectuou-se o estudo unicamente em metade dessa secção, considerando um conjunto de funções trigonométricas.

Consideraram-se 8 parâmetros desconhecidos para a obtenção do deslocamento transversal radial, atendendo aos graus de liberdade propostos, conforme figura 3. O deslocamento transversal  $v$  pode ser obtido utilizando uma equação simples

da teoria de vigas. A rotação obtém-se utilizando a função derivada do deslocamento transversal  $w$ .

$$w_{(s,\theta)} = \sum_{i=2}^9 a_{i-1} i \cos i\theta + S \sum_{i=2}^9 b_{i-1} i \sin i\theta$$

$$v_{(s,\theta)} = -\sum_{i=2}^9 a_{i-1} \sin i\theta - S \sum_{i=2}^9 b_{i-1} \cos i\theta$$

$$\varphi_{(s,\theta)} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \quad (17)$$

$$= -\frac{1}{r} \sum_{i=2}^9 a_{i-1} i^2 \sin i\theta - \frac{S}{r} \sum_{i=2}^9 b_{i-1} i^2 \cos i\theta$$

Os parâmetros desconhecidos  $a_i$  são determinados através de um sistema de equações do tipo:

$$\{\delta\} = [B] \{a_i\} \quad (18)$$

onde:

$$\{\delta\}_{k=i \text{ ou } j}^T = \{W_{1k} \quad W_{2k} \quad \varphi_{2k} \quad W_{3k} \quad \varphi_{3k} \quad W_{4k} \quad \varphi_{4k} \quad W_{5k}\}^T$$

representa o campo de deslocamentos globais relativos aos graus de liberdade do semi-anel multi nodal e  $[B]$  é a matriz das constantes que resulta da aplicação das condições fronteira.

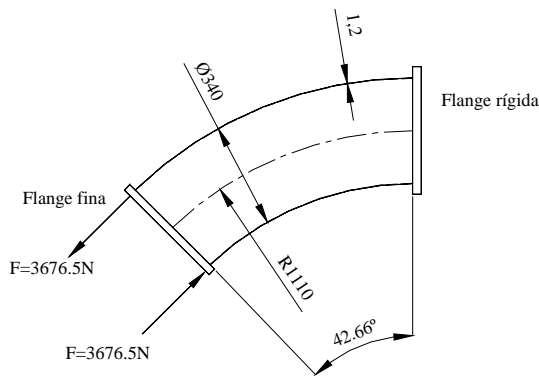
A matriz rigidez linear é calculada efectuando integrações exactas em  $s$  e  $\theta$ , conforme expressão 13.

## 4- CASOS EM ESTUDO

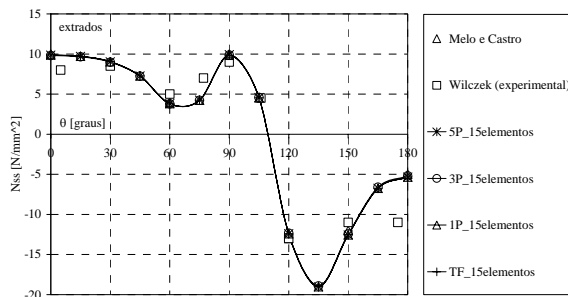
### 4.1- Análise de tensões em estruturas tubulares

A figura 4 representa um acessório curvo solicitado por um conjunto de forças concentradas diametralmente, conforme sugerido e analisado experimentalmente por [Wilczek (1984)], que pode ocorrer frequentemente em situações industriais como se visualiza na figura 1. O módulo de elasticidade é igual a  $E = 73575$  [N/mm<sup>2</sup>] e o coeficiente de *Poisson* igual a 0.3.

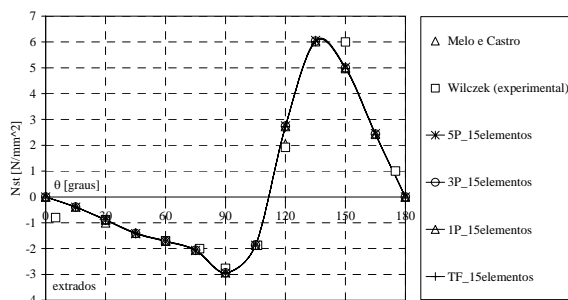
As figuras 5 e 6 representam o estado de tensão normal e de corte obtido para a secção central do acessório curvo, utilizando alguns dos modelos numéricos referidos na figura 2.



**Fig. 4** – Parâmetros geométricos e condições fronteira para o acessório curvo.



**Fig. 5** – Tensão normal a meio da secção do acessório curvo.



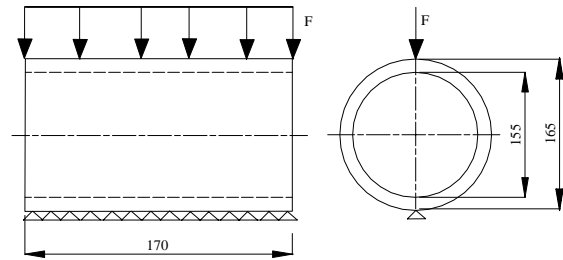
**Fig. 6** – Tensão de corte a meio da secção do acessório curvo.

Compararam-se os resultados com os que foram obtidos experimentalmente por [Wilczek (1984)] e numericamente por [Melo (1992)].

#### 4.2 – Análise da deformação em anéis circulares

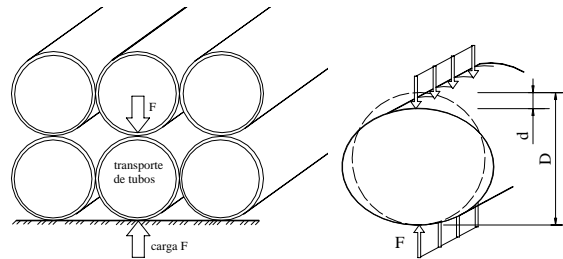
O caso em estudo é representado na figura 7, simulando uma estrutura em anel tubular de aço submetida a uma carga F por unidade de comprimento, com as extremidades livres.

O módulo de elasticidade do material é igual a  $E=2.1[\text{GPa}]$  e o coeficiente de Poisson igual a 0.3.



**Fig. 7** – Parâmetros geométricos para a estrutura em anel tubular.

Pretende-se obter o valor do deslocamento vertical  $d$  no topo da secção recta do tubo, função de uma carga F aplicada, que ocorre em situações de transporte e empilhamento de tubagens, figuras 1 e 8.



**Fig. 8** – Transporte e empilhamento de tubagens.

O valor teórico para o cálculo desse deslocamento pode ser obtido em função de uma força concentrada  $P$  transversal, utilizando o teorema de Castiglino, através da seguinte expressão:

$$d = - \left[ \frac{Pr^3(\pi^2 - 8)}{8\pi EI} + \frac{Pr\pi}{8GAm} + \frac{Pr\pi}{8EA} \right] \quad (19)$$

Neste caso considerou-se:

$$I = \frac{Lr^3}{12}, \quad A = tL, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{e} \quad m = \frac{9}{10}$$

é o factor de correcção da carga  $P$ .

O procedimento experimental representa-se na figura 9. Para a implementação da carga, utilizou-se uma célula de carga através de um sistema hidráulico. Os deslocamentos foram obtidos recorrendo a um sistema de aquisição de dados através da medição efectuada com um LVDT.

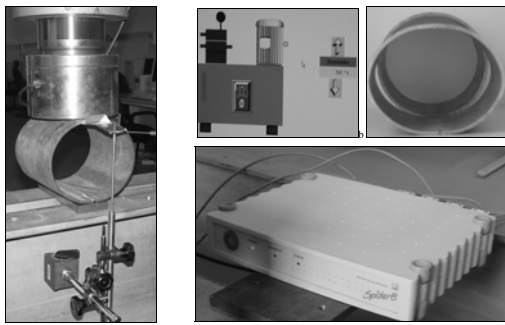


Fig. 9 – Sistema experimental utilizado.

Na figura 10 representa-se o deslocamento vertical obtido, função da carga  $F$ . Os resultados obtidos para a parte linear dos ensaios realizados, são comparados com os obtidos utilizando a solução analítica e os resultados numéricos obtidos com o elemento *Ring* representado na figura 3. É possível verificar que os tubos ensaiados possuem uma rigidez tubular igual a  $28 \text{ [kN/m}^2\text{]}$ , verificada em função da zona elástica da curva F-d, como proposto por [Watkins (2000)].

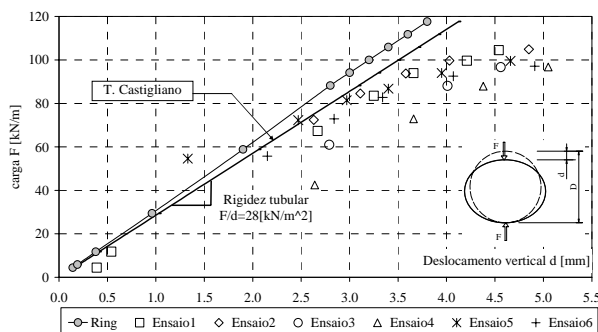


Fig. 10 – Deslocamento vertical  $d$ .

## 5- CONCLUSÕES

A complexidade, na análise, de estruturas do tipo mencionado, exige o recurso a métodos numéricos de elevado desempenho, pelo que se recorreu à utilização do método dos elementos finitos, desenvolvendo elementos com estas características. Para além do campo de tensões possível de obter em função de qualquer tipo de carregamento, é possível ainda obter a rigidez de estruturas tubulares através da sua resistência à deflexão. Estes parâmetros são muito importantes na concepção de estruturas deste tipo, tendo em vista as aplicações decorrentes e inclusive o transporte prévio e instalação posterior.

## REFERÊNCIAS

- von Kármán Th., “Über die Formänderung Dünnwandiger Rohre Insbesondere Federnder Ausgleichrohre“, Zeits V.D.I., Band 55,ss. 1889-1895, 1911.
- Vigness L., “Elastic Properties of Curved Tubes“, Trans A.S.M.E., Vol. 65, pp.105-120, 1943.
- Cheng D.H., Thailer M.J., “On the Bending of Curved Circular Tubes“, ASME, Jn. Eng. Indust., Vol. 92, sr. B, nº1, pp. 62-66, 1970.
- Thomson G., “The Influence of End Constraints on Pipe Bends“, PhD Thesis, University of Strathclyde, Scotland, UK, 1980.
- Bathe K. J., Almeida C. A., “A Simple and Effective Pipe Elbow Element – Pressure Stiffening Effects“, Journal of Applied Mechanics, Vol.49, pp.914-916, 1982.
- Wilczek E., “Statische Berechnung eines Rohrkrümmers mit Realen Randbedingungen“, Ph.D. thesis, Technischen Hochschule Aachen, Aachen, 1984.
- Melo F.J.M.Q., Castro P.M.S.T., “A Reduced Integration Mindlin Beam Element for Linear Elastic Stress Analysis of Curved Pipes Under Generalized In-Plane Loading“, Computers & Structures, Vol.43 Nº 4, pp.787-794, 1992.
- Melo F.J.M.Q., Castro P.M.S.T., “The Linear Elastic Stress Analysis of Curved Pipes Under Generalized Loads Using a Reduced Integration Finite Ring Element“, Journal of Strain Analysis, Vol.32/1, pp 47-59, 1997.
- Fonseca E.M.M., Melo F.J.M.Q., Oliveira C.A.M, “Determination of Flexibility Factors on Curved Pipes with end Restraints Using a Semi-Analytic Formulation“, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol.79/12, pp 829-840, 2002.
- Fonseca E.M., Melo F.J.M.Q., Oliveira C.A.M, “The Thermal and Mechanical Behaviour of Structural Steel Piping Systems“, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol.82/2, pp.145-153, 2005.
- Flügge W., “Thin elastic shells“, 2nd ed., Springer, Berlin, 1973.
- Kitching R., “Smooth and mitred pipe bends“, In: Gill SS, editor. *The stress analysis of pressure vessels and pressure vessels components*, Pergamon Press, Oxford, Chapter 7, 1970.
- Watkins R.K., Anderson L.R., “Structural mechanics of buried pipes“, CRC Press, New York, 2000.

