

# VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO *LAYERWISE* NO CONTROLO ACTIVO DE VIBRAÇÕES DE VIGAS COM ACTUADORES PIEZOELÉCTRICOS E UM TRANSDUTOR *LASER*

C. M. A. Vasques, J. Dias Rodrigues

DEMEGI, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Rua Dr. Roberto Frias, 4200-465 Porto, Portugal  
E-mail: [cvasques@fe.up.pt](mailto:cvasques@fe.up.pt) e [jdr@fe.up.pt](mailto:jdr@fe.up.pt)

## RESUMO

*Neste artigo, um modelo de elementos finitos de viga inteligente, baseado numa teoria com acoplamento electromecânico total, é validado por via experimental. O modelo de elementos finitos de viga inteligente considera, na formulação do modelo mecânico, a teoria layerwise para a aproximação do campo de deslocamentos da viga e das camadas piezoeléctricas. Na caracterização do modelo eléctrico, o efeito piezoeléctrico directo é levado em consideração através de aproximações fisicamente adequadas do campo eléctrico na direcção axial e transversal. Para a sua validação, é utilizado um sistema de controlo activo de vibrações constituído por uma viga em consola que incorpora duas cerâmicas piezoeléctricas montadas na superfície da viga, uma funcionando como excitador e outra como actuador, sendo o controlo realizado por feedback da velocidade medida através de um transdutor laser. Em regime forçado, a excitação é aplicada através de uma das cerâmicas piezoeléctricas (excitador). O sinal de feedback fornecido pelo transdutor laser é utilizado como sinal de controlo a aplicar à segunda cerâmica (actuador). Os resultados obtidos demonstram a robustez e representatividade do modelo de elementos finitos desenvolvido e a aplicabilidade e funcionalidade do sistema de controlo activo de vibrações apresentado.*

## 1. INTRODUÇÃO

As estruturas e materiais *inteligentes* [1, 2] têm ao longo das duas últimas décadas sido objecto de um grande desenvolvimento em termos de investigação. Dada a natureza interdisciplinar do tema, matemáticos, físicos, engenheiros químicos, civis, aeroespaciais, mecânicos e electrotécnicos, encontram-se actualmente envolvidos em alguma parte do processo de investigação e desenvolvimento. Actualmente, o controlo activo de vibrações constitui já uma tecnologia imprescindível, com aplicação corrente principalmente nas indústrias aeroespacial e aeronáutica. Porém, inúmeras possibilidades se abrem para a

utilização desta tecnologia noutras áreas industriais.

Através de técnicas activas é possível controlar as vibrações estruturais, em particular os efeitos normalmente indesejáveis. Essas técnicas permitem controlar o nível de vibração da estrutura em cada instante recorrendo a actuadores que agem sobre a estrutura segundo uma determinada lei de comando [3-5]. É o princípio do *controlo activo de vibrações*. Os actuadores são normalmente fabricados a partir de materiais ditos *inteligentes*, capazes de produzir uma acção distribuída na estrutura. De entre esses materiais, os mais utilizados no controlo estrutural são os materiais cerâmicos piezoeléctricos [6, 7].

Neste artigo, um conceito relativamente novo é utilizado na supressão de vibrações de uma viga *inteligente* em consola. A abordagem considera a utilização combinada de um transdutor *laser* e duas cerâmicas piezoeléctricas. O transdutor *laser* é utilizado para medir a velocidade em determinado ponto da viga, e o sinal gerado, proporcional à velocidade medida, é então utilizado como sinal de *feedback*. Devido ao efeito piezoeléctrico de conversão, as cerâmicas piezoeléctricas permitem exercer na estrutura uma acção mecânica distribuída (actuadores) e podem, através do efeito piezoeléctrico directo, medir as deformações localizadas numa determinada zona da viga (sensores).

O transdutor *laser*, quando utilizado em sistemas de controlo, constitui uma solução bastante interessante como sensor de velocidade porque dispensa a necessidade de integrar ou diferenciar o sinal de controlo, permitindo assim reduzir os efeitos dos atrasos e ruídos que de outra forma poderiam ser introduzidos no sistema. Além disso, ele permite medir a velocidade numa direcção normal à superfície da estrutura, dispensa a utilização de fios de conexão e o contacto com a estrutura, e beneficia ainda duma grande versatilidade e facilidade de alteração do ponto de medição.

Assim, e com base nas vantagens referidas anteriormente, a técnica de controlo activo de vibrações aqui apresentada justifica a sua utilização em estruturas que não permitam o contacto dos sensores com a mesma, ou ainda, em situações em que seja necessário medir a velocidade em mais do que um ponto da estrutura.

O caso aqui analisado considera apenas um único ponto de medição da velocidade. Porém, a medição da velocidade em mais do que um ponto pode facilmente ser implementada através de um transdutor *laser* de varrimento (*scanning laser*), o qual constitui uma solução ainda mais versátil e confere ao sistema uma maior adaptabilidade, com a agravante de aumentar o custo do equipamento.

Na literatura técnica encontram-se poucos exemplos de leis de controlo e resultados

experimentais de aplicações semelhantes à aqui apresentada. Um exemplo onde são utilizadas estratégias de controlo baseadas nas técnicas clássicas de controlo por *feedback*, com base na utilização de um transdutor *laser* de varrimento, é referido no trabalho de Ghoshal *et al.* [8].

De forma a validar o modelo de elementos finitos por via experimental são realizados dois ensaios experimentais numa viga de alumínio em consola com duas cerâmicas piezoeléctricas montadas na superfície. Num primeiro ensaio é avaliada a acção (actuação) estática simultânea dos dois actuadores piezoeléctricos. Em seguida, num segundo ensaio em situação de regime forçado, uma das duas cerâmicas piezoeléctricas é utilizada como excitador da estrutura e a outra como actuador para o sinal de controlo obtido por *feedback* da velocidade medida pelo transdutor *laser*. Finalmente, o sistema é ensaiado em regime livre, funcionando o transdutor *laser* como sensor e uma das cerâmicas como actuador. Os resultados experimentais são então discutidos e comparados com os resultados numéricos fornecidos pelo modelo de elementos finitos e a performance do sistema de controlo por *feedback* da velocidade é avaliada.

## 2. MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Nesta secção é sucintamente apresentado o modelo de elementos finitos de viga *inteligente* desenvolvido por Vasques e Rodrigues [9, 10]. O modelo considera uma teoria com acoplamento electromecânico total (*fully coupled electromechanical theory*) [11] e apresenta três camadas (núcleo metálico e camadas exteriores piezoeléctricas). Na formulação do modelo mecânico é considerada a teoria *layerwise* para a aproximação do campo de deslocamentos da viga e das camadas piezoeléctricas. No modelo eléctrico são consideradas diferentes condições de fronteira eléctricas das camadas piezoeléctricas e o efeito piezoeléctrico directo é levado em consideração através de aproximações fisicamente adequadas do campo eléctrico na direcção axial e transversal.

O elemento finito de viga *layerwise* piezoelétrico possui dois nós, com cinco graus de liberdade mecânicos por nó, nomeadamente, o deslocamento axial  $u_0$  e transversal  $w_0$  do plano médio da viga e a rotação  $\theta_k$  de cada uma das três camadas ( $k=1,2,3$ ), e dois graus de liberdade eléctricos por elemento, nomeadamente, a diferença de potencial eléctrico  $\phi_p$  de cada uma das duas camadas piezoeléctricas ( $p=1,3$ ). Para a aproximação ao nível do elemento finito dos vectores de deslocamentos e de diferenças de potencial generalizados, são consideradas funções de forma lineares de continuidade  $C^0$  e funções unitárias (constantes), respectivamente.

### Modelo Espacial

O modelo espacial da discretização por elementos finitos, constituído pelas equações do movimento e de equilíbrio electrostático, após a *assemblagem* das matrizes e vectores dos elementos finitos, tem a forma

$$[M_{uu}]\{\ddot{u}\} + [D_{uu}]\{\dot{u}\} + [K_{uu}]\{u\} + [K_{u\phi}]\{\phi\} = \{F\}, \quad (1)$$

$$[K_{\phi u}]\{u\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{Q\}, \quad (2)$$

em que  $[M_{uu}]$  é a matriz de massa,  $[D_{uu}]$  é a matriz de amortecimento viscoso do tipo proporcional,  $[K_{uu}]$  é a matriz de rigidez mecânica,  $[K_{u\phi}] = [K_{\phi u}]^T$  são as matrizes de rigidez electromecânica,  $[K_{\phi\phi}]$  é a matriz de rigidez eléctrica,  $\{u\}$  é o vector de deslocamentos mecânicos,  $\{\phi\}$  é o vector de diferenças de potencial,  $\{F\}$  é o vector de forças mecânicas nodais e  $\{Q\}$  é o vector de cargas eléctricas aplicadas.

Como referido anteriormente, o modelo de elementos finitos contempla uma teoria com acoplamento electromecânico total [11], em que é assumida uma distribuição não-linear do potencial eléctrico na espessura das camadas piezoeléctricas.

Dessa forma, um modelo eléctrico mais rigoroso é apresentado. Além disso, e devido à formulação *layerwise* (camadas discretas) do campo de deslocamentos, é igualmente apresentado um modelo mecânico mais rigoroso, o qual permite representar mais eficientemente os efeitos intralaminares e interlaminares, conferindo ao modelo uma melhor representatividade da viga *inteligente*.

### Modelo Modal

Na maior parte das vezes, o modelo espacial obtido pelo método dos elementos finitos possui um elevado número de graus de liberdade e, geralmente, as matrizes  $[K_{uu}]$  e  $[M_{uu}]$ , resultantes da discretização por elementos finitos, apresentam uma estrutura em forma de banda que representa o acoplamento entre os vários graus de liberdade. Além disso, a matriz espacial de amortecimento não é construída a partir de matrizes elementares como as de massa e de rigidez, e torna-se necessário o recurso a procedimentos específicos.

Quando se projecta um controlador pode optar-se por um modelo completo do sistema e, conseqüentemente, por um esforço computacional elevado, ou por um modelo reduzido do sistema, o qual exige um esforço computacional menor. Com efeito, quando excitada, a viga *inteligente* apresenta modos preferenciais de vibração, cuja amplitude depende do conteúdo espectral da excitação. Assim, existe uma grande vantagem na transformação das equações do sistema na base generalizada para o seu equivalente na base modal. Dessa forma, em alternativa à utilização do modelo espacial para a caracterização do sistema, pode ser utilizado o modelo modal reduzido, o qual é mais conveniente do ponto de vista computacional e mais interessante na análise da contribuição individual dos modos naturais de vibração para a resposta global do sistema e na inclusão do mecanismo de amortecimento.

Neste estudo, adoptou-se um mecanismo de amortecimento viscoso proporcional. Uma das vantagens inerentes a este modelo de amortecimento é que os modos naturais de vibração se mantêm semelhantes aos do

sistema não amortecido, sendo as frequências naturais amortecidas  $w_i^d$  dadas por

$$w_i^d = w_i \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad (3)$$

em que  $w_i$  é a frequência natural não amortecida e  $\xi_i$  a correspondente razão de amortecimento modal, e as formas naturais são iguais. Em consequência, os vectores modais do sistema não amortecido diagonalizam, igualmente, no espaço modal, a matriz espacial de amortecimento.

As frequências naturais não amortecidas e as correspondentes formas naturais de vibração podem ser obtidas através da solução do problema generalizado de valores e vectores próprios,

$$[K_{uu}]\{U\} = \omega^2 [M_{uu}]\{U\}. \quad (4)$$

Os valores próprios fornecem os  $n$  valores das frequências naturais não amortecidas ( $w_1^2, \dots, w_n^2$ ), e os vectores próprios as correspondentes formas naturais de vibração ( $\{\Phi\}_1, \dots, \{\Phi\}_n$ ). Os vectores próprios apresentam propriedades de ortogonalidade em relação às matrizes de massa e de rigidez e podem ser agrupados numa matriz  $[\Phi] = [\{\Phi\}_1, \dots, \{\Phi\}_n]$ , designada por matriz modal.

Enquanto que as frequências são únicas e características de um dado sistema, os vectores modais estão sujeitos a um factor de escala indeterminado que afecta apenas a amplitude da forma natural de um determinado modo, não afectando a sua forma. Adoptando um processo de escalonamento ou normalização para massas modais unitárias, a propriedade de ortonormalidade dos vectores modais em relação às matrizes de massa e de rigidez escreve-se

$$[\Psi]^T [M_{uu}] [\Psi] = [I], \quad (5)$$

$$[\Psi]^T [K_{uu}] [\Psi] = [\Omega], \quad (6)$$

onde  $[\Psi]$  representa a matriz modal normalizada,  $[\Omega]$  é uma matriz diagonal cujos termos são os quadrados das frequências naturais e  $[I]$  corresponde à matriz identidade. Em consequência, para a matriz de amortecimento proporcional tem-se,

$$[\hat{\Psi}]^T [D_{uu}] [\hat{\Psi}] = [\Lambda], \quad (7)$$

em que  $[\Lambda]$  é uma matriz diagonal cujo termo genérico é do tipo  $2\xi_i w_i$ .

Recorrendo à matriz modal como matriz de transformação entre coordenadas generalizadas  $\{u\}$  e coordenadas modais  $\{\eta\}$ ,

$$\{u\} = [\Psi] \{\eta\}, \quad (8)$$

as equações (1) e (2) do modelo espacial podem então projectar-se na base modal ou natural.

Conforme já referido, a resposta do sistema é regulada por modos preferenciais de vibração, de acordo com o conteúdo espectral da excitação. No entanto, na maioria dos casos práticos, apenas os primeiros modos terão uma contribuição significativa na resposta global do sistema, devido ao facto de serem os de menor energia e, consequentemente, os mais facilmente excitáveis. Assumindo-se que a resposta do sistema é regulada apenas pelos primeiros  $r$  modos ( $r < n$ ), a base modal é de dimensão  $r$  e o vector dos deslocamentos  $\{u\}$  pode ser aproximado pela sobreposição modal dos primeiros  $r$  modos,

$$\{u\} = \sum_{i=1}^r \{\Psi\}_i \eta_i = [\hat{\Psi}] \{\eta\}, \quad (9)$$

em que  $[\hat{\Psi}] = [\{\Psi\}_1, \dots, \{\Psi\}_r]$  é a matriz modal truncada aos primeiros  $r$  modos e  $\eta_i$  as respectivas coordenadas modais. Dessa forma, a dimensão do sistema na base modal ou natural não é mais o número total de graus de liberdade do modelo de elementos finitos, mas sim o número de modos escolhidos para a sua modelização.

A principal desvantagem é que devido à truncatura os modos de ordem superior a  $r$  são ignorados. Apesar da sua contribuição não ser significativa na resposta global do sistema, existe sempre o perigo que o sinal de controlo excite os modos de altas frequências, degradando a performance do sistema ou originando instabilidades. Esse fenómeno é conhecido como *spillover* [3].

Com base na sobreposição modal truncada (9) e nas relações (5)-(7), as equações (1) e (2) do modelo espacial dão origem ao modelo modal reduzido de dimensão  $r$  na forma

$$\{\ddot{\eta}\} + [\Lambda]\{\dot{\eta}\} + [\Omega]\{\eta\} + [\hat{\Psi}]^T [K_{u\phi}]\{\phi\} = [\hat{\Psi}]^T \{F\}, \quad (10)$$

$$[K_{\phi u}][\hat{\Psi}]\{\eta\} + [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{Q\}. \quad (11)$$

### 3. CONTROLO ACTIVO DE VIBRAÇÕES

O método das variáveis de estado é a base das teorias de controlo moderno. Nesse método a caracterização do sistema é efectuada por equações diferenciais em vez de funções de transferência. Dessa forma, no projecto e análise de sistemas de controlo é altamente recomendável a representação do sistema por variáveis de estado. A principal vantagem desta representação está relacionada com a maior facilidade de representação de sistemas com um elevado número de *inputs* e *outputs* e, ainda, com a possibilidade de representação de sistemas transientes não-lineares [12].

As variáveis de estado do modelo modal reduzido definem-se por

$$\{x_1\} = \{\eta\}, \quad \{x_2\} = \{\dot{\eta}\}. \quad (12)$$

Para um sistema em malha aberta, o sistema é representado por um conjunto de duas equações diferenciais matriciais de primeira ordem em termos das variáveis de estado  $\{x_1\}$  e  $\{x_2\}$ . A representação do sistema em malha aberta toma a forma

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B_u]\{r_u\} + [B_\phi]\{r_\phi\}, \quad (13)$$

$$\{y\} = [C]\{x\}, \quad (14)$$

em que  $\{x\}$  é o vector de estados,  $[A]$  é a matriz de sistema,  $[B_u]$  é a matriz de *input* mecânico,  $[B_\phi]$  é a matriz de *input* (controlo) eléctrico,  $\{r_u\}$  é o vector de *input* mecânico,  $\{r_\phi\}$  é o vector de *input* (controlo) eléctrico,  $\{y\}$  é o vector de *output* e  $[C]$  é a matriz de *output*, definidos por

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{x_1\} \\ \{x_2\} \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[\Omega] & -[\Lambda] \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$[B_u] = \begin{bmatrix} [0] \\ [\hat{\Psi}]^T \end{bmatrix}, \quad [B_\phi] = \begin{bmatrix} [0] \\ -[\hat{\Psi}]^T [K_{u\phi}]_a \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -[K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s [\hat{\Psi}] & [0] \\ [0] & -[K_{\phi\phi}]_s^{-1} [K_{\phi u}]_s [\hat{\Psi}] \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\{r_u\} = \{F\}, \quad \{r_\phi\} = \{\phi\}_a, \quad (19)$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} \{\phi\}_s \\ \{\dot{\phi}\}_s \end{Bmatrix}. \quad (20)$$

Os índices "a" e "s" representam os graus de liberdade eléctricos (diferenças de potencial eléctrico) associados com os actuadores e sensores, respectivamente.

O sistema em malha aberta contempla dois tipos de carregamento exterior distintos: carregamento mecânico  $\{F\}$  (forças nodais) e carregamento eléctrico  $\{\phi\}_a$  (tensão eléctrica). No entanto, em malha fechada, e considerando o presente sistema de controlo, o carregamento eléctrico deixa de ser independente do sistema e passa a relacionar-se com a velocidade medida num determinado ponto da via (sinal de *feedback*).

Para o sistema em malha fechada, a tensão de controlo é definida de acordo com o tipo de *feedback* utilizado,

$$\{\phi\}_a = -[K_g]\{x\}, \quad (21)$$

em que  $[K_g]$  representa a matriz de ganho do *feedback*. No presente estudo, o sinal de *feedback* é proporcional à velocidade transversal medida num determinado ponto da viga; dessa forma, a matriz de ganho  $[K_g]$  é dada por

$$[K_g] = -\begin{bmatrix} 0 & G\{[Loc][\hat{\Psi}]\} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

em que  $G$  é o valor do ganho e  $[Loc]$  representa uma matriz booleana de identificação do grau de liberdade correspondente ao ponto onde a velocidade é medida. Assim, para o sistema em malha fechada, o vector de *input* apenas contempla a excitação mecânica  $\{r_u\}$ . Além disso, e uma vez que o vector de controlo  $\{r_\phi\}$  é definido apenas em função dos estados, a representação do sistema em malha fechada toma a forma

$$\{\dot{x}\} = ([A] - [B_\phi][K_g])\{x\} + [B_u]\{r_u\}. \quad (23)$$

Fica então claro que a matriz de ganho  $[K_g]$  controla o sistema através da modificação da matriz de sistema. Dessa forma, através da definição adequada da matriz de ganho, a lei de controlo permite estabilizar os modos de vibração do sistema aumentando o amortecimento modal (os modos iniciais de  $[A]$  transformam-se nos modos mais amortecidos de  $[A] - [B_\phi][K_g]$ ).

#### 4. RESULTADOS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS

No sentido de validar por via experimental o modelo de elementos finitos de viga *inteligente* começa-se por analisar a acção estática simultânea dos actuadores piezoeléctricos, para, em seguida, se avaliarem as respostas dinâmicas em regime forçado e livre.

Nos ensaios experimentais foi utilizada uma viga de alumínio em consola com 400 mm de comprimento, 15 mm de largura e 2 mm de espessura, e duas cerâmicas piezoeléctricas PLT30/15/1-PX5-N (Philips Components) com 30 mm de comprimento, 15 mm de largura e 1 mm de espessura, as quais são fixadas em ambas as faces da viga a uma distância de 5 mm do encastramento. As propriedades do material da viga (alumínio) e das cerâmicas piezoeléctricas (PXE 5) são definidas nas tabela 1 e ela 2, respectivamente.

As razões de amortecimento modal  $\xi_i$ , utilizadas no modelo numérico foram identificadas por via experimental a partir de uma função de resposta em frequência em malha aberta (tabela 3).

Tabela 1 - Propriedades materiais da viga.

Alumínio	
$E$ [N m <sup>-2</sup> ]	70.00x10 <sup>9</sup>
$G$ [N m <sup>-2</sup> ]	26.92x10 <sup>9</sup>
$\rho$ [Kg m <sup>-3</sup> ]	2710

Tabela 2 - Propriedades do material piezoeléctrico.

PXE 5			
$c_{11}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	13.11x10 <sup>10</sup>	$d_{31}$ [m V <sup>-1</sup> ]	-215x10 <sup>-12</sup>
$c_{12}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	7.984x10 <sup>10</sup>	$d_{33}$ [m V <sup>-1</sup> ]	500x10 <sup>-12</sup>
$c_{13}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	8.439x10 <sup>10</sup>	$d_{15}$ [m V <sup>-1</sup> ]	515x10 <sup>-12</sup>
$c_{33}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	12.31x10 <sup>10</sup>	$\epsilon_{11}^T / \epsilon_0$	1800
$c_{44}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	2.564x10 <sup>10</sup>	$\epsilon_{33}^T / \epsilon_0$	2100
$c_{66}^E$ [N m <sup>-2</sup> ]	2.564x10 <sup>10</sup>	$\rho$ [Kg m <sup>-3</sup> ]	7800

Tabela 3 - Razões de amortecimento modal experimentais do sistema em malha aberta.

Modos	1°	2°	3°	4°
$\xi$ [%]	1.71	0.72	0.42	0.41

#### Setup Experimental

A montagem experimental da viga em consola foi realizada sobre uma mesa anti-vibratória Newport (figura 1).

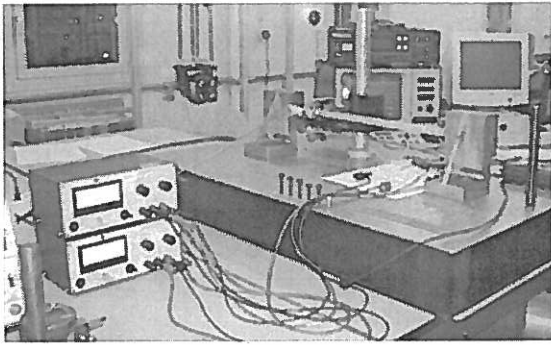


Fig. 1 - Montagem experimental da viga *inteligente* em consola utilizada na análise da acção estática dos actuadores.

Na materialização das condições de fronteira da viga, foi utilizado um suporte rígido que restringe o movimento de translação e de rotação da extremidade encastrada da viga.

As cerâmicas piezoelétricas (figura. 2) foram fixadas na viga através de um adesivo não condutor à base de cianocrilato (Loctite - 496).

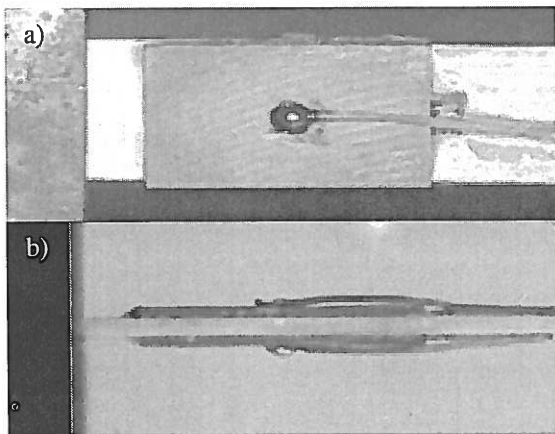


Fig. 2 - Montagem das cerâmicas piezoelétricas: a) vista de lado; b) vista de cima.

### Acção Estática dos Actuadores

Para a aplicação da tensão eléctrica aos actuadores piezoelétricos foram utilizadas duas fontes de alimentação com uma tensão máxima de 300 V (DC). A medição do deslocamento foi efectuada por um transdutor de deslocamento capacitivo Phillips - PR6423, com uma gama de medição de 1 mm e uma resolução superior a 1  $\mu$ m (figura. 3).

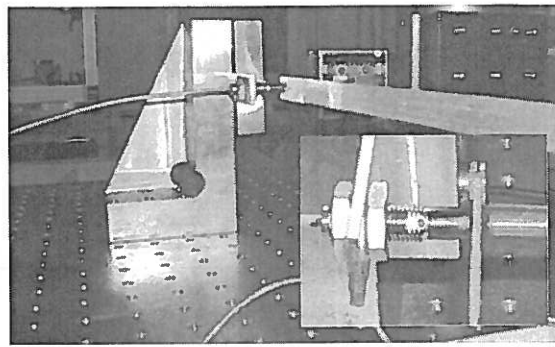


Fig. 3 - Transdutor de deslocamento capacitivo Phillips - PR6423.

De forma a determinar a sensibilidade do transdutor para o alumínio, foi previamente efectuada uma calibração experimental do transdutor, obtendo-se um valor da sensibilidade de 13.62 V/mm. Para a leitura dos valores fornecidos pelo transdutor de deslocamento capacitivo, proporcionais ao deslocamento medido, foi utilizado um multímetro digital (APPA - 69) com uma resolução de 1 mV.

### Resultados: acção estática

A flecha da viga em consola sob a acção estática simultânea dos dois actuadores piezoelétricos é apresentada na figura. 4. A flecha foi medida pelo transdutor capacitivo (figura 3) a 5 mm da extremidade livre da viga para diferentes valores da tensão eléctrica aplicada aos dois actuadores.

Como se pode verificar na figura. 4, os resultados numéricos apresentam uma boa concordância com os experimentais, validando-se assim, por via experimental, o modelo proposto sob a acção estática dos actuadores. O desvio máximo da flecha é de 4.1% para a tensão de 250 V. Note-se que os resultados experimentais subestimam os numéricos. Esse facto deve-se à colagem dos actuadores piezoelétricos na viga, em que uma perfeita transmissibilidade de esforços na interface com a viga não é, normalmente, assegurada. Dessa forma, o procedimento de montagem das cerâmicas piezoelétricas (colagem) revela-se fundamental em todo o procedimento experimental.

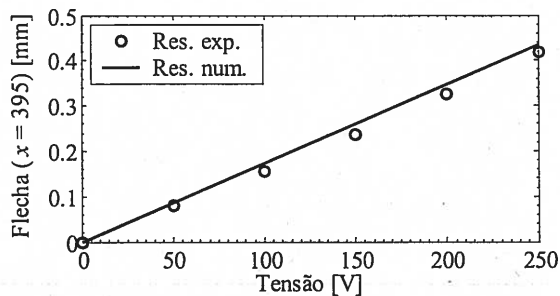


Fig. 4 - Flecha da viga em função da tensão aplicada: resultados numéricos e experimentais.

### Feedback da Velocidade

De forma a implementar por via experimental um sistema de controlo por *feedback* com base nas medições da velocidade, foi utilizado um transdutor *laser* Polytec – OFV 303 para a medição da resposta dinâmica em regime livre e forçado. Para a aquisição de dados foi utilizado um analisador dinâmico de sinal Brüel & Kjær – 2035 de dois canais com um módulo de geração de sinal. A montagem experimental e o equipamento utilizado são apresentados nas figuras 5 e 6, respectivamente.

A excitação em regime livre é gerada através de um deslocamento inicial aplicado na extremidade livre da viga e, em regime forçado, através de um sinal em tensão que é aplicado a uma das duas cerâmicas piezoeléctricas (excitador). O sinal de excitação é obtido de um gerador de sinal e condicionado por um amplificador de potência, conforme representado na figura 7.

A resposta da viga foi medida pelo transdutor *laser* a 15 mm da extremidade livre. De forma a implementar o sistema de controlo por *feedback*, o sinal do transdutor *laser* (velocidade) foi utilizado como tensão de controlo a aplicar à segunda cerâmica piezoeléctrica (actuador). Para isso, o sinal produzido pelo transdutor é condicionado por um filtro Krohn-Hite – 3550 e por um amplificador operacional de ganho regulável, o qual possui um ganho máximo de 101 e uma tensão máxima de  $\pm 150$  V. Como será referido mais à frente, a utilização de um filtro passa-banda regulado ao primeiro modo natural de vibração revela-se necessária de forma a assegurar a estabilidade do sistema.



Fig. 5 - Montagem experimental da viga *inteligente* utilizada no controlo activo de vibrações e ponto de medição do transdutor *laser*.

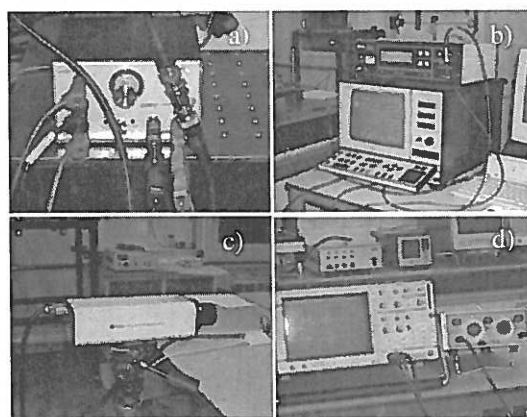


Fig. 6 - Equipamento utilizado no ensaio: a) amplificador operacional; b) analisador dinâmico de sinal Brüel & Kjær – 2035 e controlador do transdutor *laser* Polytec – OFV 3001; c) unidade de medição do transdutor *laser* Polytec – OFV 303; d) osciloscópio digital LeCroy – 9450A e filtro Krohn-Hite – 3550.

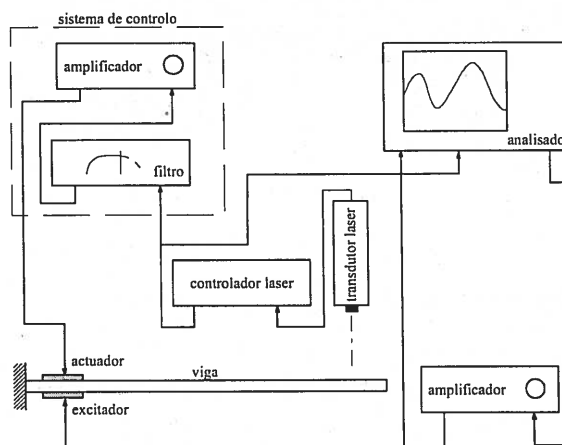


Fig. 7 - Esquema representativo da montagem experimental do sistema de controlo por *feedback* da velocidade.

### Lugar geométrico das raízes do sistema

Com base no modelo de elementos finitos desenvolvido, para o sistema em malha fechada com controlo por *feedback* da



velocidade, o lugar geométrico das raízes, para ganhos compreendidos nos intervalos  $[-\infty, 0]$  e  $[0, +\infty]$ , é apresentado nas figura 8 e 9, respectivamente.

É possível observar-se que o aumento do ganho de controlo desloca os pólos ( $\times$ ) do sistema em malha fechada na direcção dos zeros ( $\square$ ). Esse deslocamento, no caso de os afastar do eixo imaginário,  $\text{Re}(s) = 0$ , e desde que se situem no semi-plano esquerdo, representa um acréscimo da razão de amortecimento modal, a qual, para  $\xi \ll 1$ , pode ser aproximada por  $\xi = -\text{Re}(s)/|\text{Im}(s)|$  [13, 14].

Da análise das figuras 8 e 9 constata-se que existe uma simetria de comportamento consoante o sinal do ganho escolhido. Assim, para valores positivos do ganho, os modos pares são facilmente excitados, mesmo para valores de ganho relativamente baixos. Ao contrário, para ganhos negativos, um comportamento oposto é obtido e os modos ímpares são facilmente excitados. Dessa forma, com o objectivo de amortecer o primeiro modo, o valor do ganho, que afecta todos os modos, teria que ser limitado ao ganho máximo admissível sem que o segundo e o quarto modo sejam excitados. Porém, nestas condições, o sistema de controlo seria muito ineficiente.

Uma alternativa é considerar, na definição da tensão de controlo, um valor de velocidade com apenas a contribuição do primeiro modo. Essa situação foi materializada experimentalmente através de um filtro passa-banda regulado ao primeiro modo, o qual foi aplicado ao sinal da velocidade medida. Assim, de forma a amortecer o primeiro modo (modo fundamental), o valor do ganho pode ser escolhido livremente, apenas limitado pela tensão de saturação dos actuadores piezoeléctricos, sem haver o risco de excitar os modos pares. O correspondente lugar geométrico das raízes é apresentado na figura 10.

#### Resultados: regime forçado harmónico

A função de resposta em frequência em malha aberta, obtida entre a velocidade medida a 15 mm da extremidade livre da

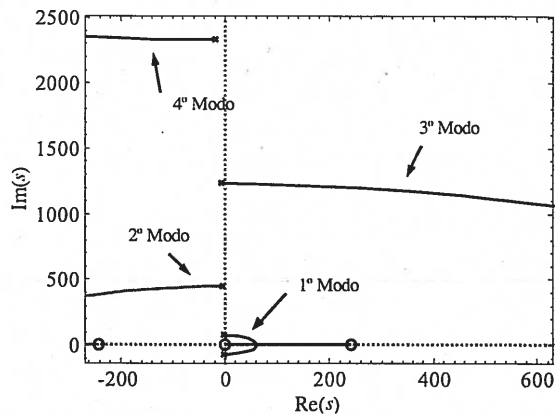


Fig. 8 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade para ganhos compreendidos no intervalo  $[-\infty, 0]$ .

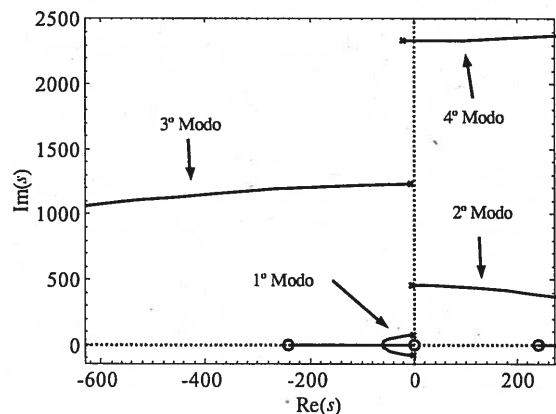


Fig. 9 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade para ganhos compreendidos no intervalo  $[0, +\infty]$ .

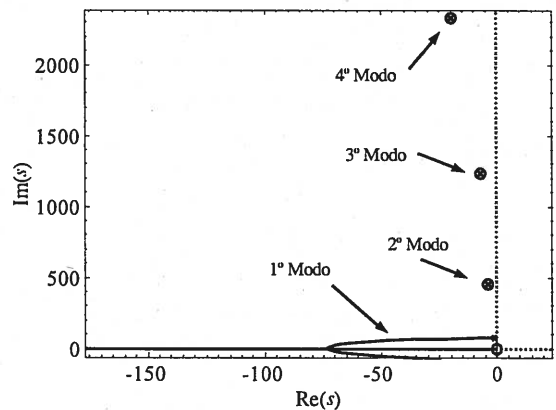


Fig. 10 - Lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada para ganhos compreendidos no intervalo  $[0, +\infty]$ .

viga e a tensão aplicada ao excitador, é apresentada na figura 11. Como se pode constatar, existe uma boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos. As frequências de ressonância dos dois primeiros modos apresentam

desvios reduzidos e um desvio máximo de 4.75% é encontrado no quarto modo (tabela 3). Note-se ainda que o modelo numérico sobrestima o valor efectivo das frequências de ressonância. Esse facto deve-se, uma vez mais, à colagem das cerâmicas piezoeléctricas que, dada a dificuldade em garantir a transmissibilidade completa dos esforços na interface com a viga, dá origem a uma diminuição da rigidez da estrutura, mantendo, no entanto, a sua massa inalterada. Dessa forma, as frequências de ressonância experimentais tomam valores inferiores aos numéricos.

Na figura 12 é apresentada a coerência da função de resposta em frequência em malha aberta. Como se pode constatar, a função coerência evidencia uma boa eficiência do actuador piezoeléctrico na excitação da estrutura, demonstrando a relação de causalidade entre a resposta e a excitação, e revela uma elevada razão sinal/ruído.

As funções de resposta em frequência numéricas e experimentais em malha fechada, obtidas para diferentes valores do ganho, são apresentadas nas figuras 13-16.

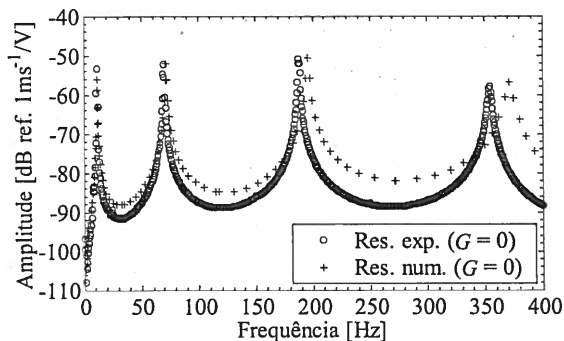


Fig. 11 - Função de resposta em frequência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha aberta.

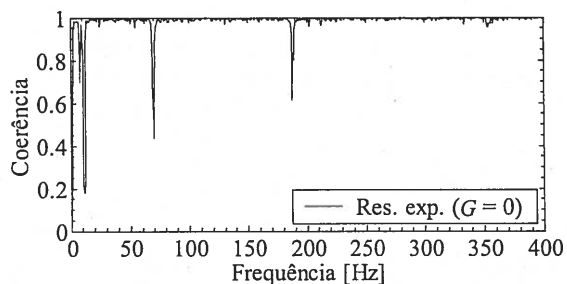


Fig. 12 - Coerência da função de resposta em frequência experimental em malha aberta.

Tabela 3 – Frequências naturais do sistema em malha aberta [Hz].

Modos	1º	2º	3º	4º
Res. exp.	11.50	69.50	188.0	354.0
Res. num.	11.71	71.75	195.9	370.8
Desvio [%]	1.83	3.24	4.20	4.75

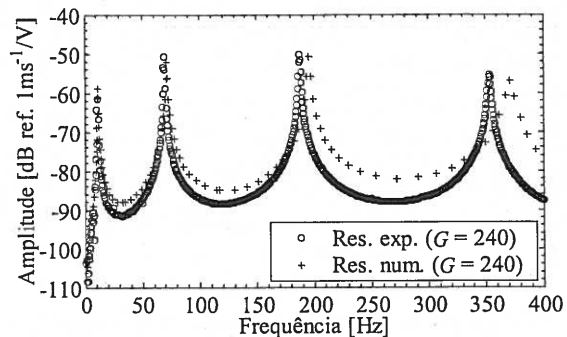


Fig. 13 - Função de resposta em frequência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

Como se pode observar nas figuras, para valores crescentes do ganho, apenas o primeiro modo é amortecido. Ambos os resultados, experimentais e numéricos, demonstram esse facto. A concordância entre resultados é bastante boa e a amplitude do primeiro modo em malha aberta (figura 11), com um valor médio entre os resultados experimentais e numéricos de  $-55$  dB, diminui para cerca de  $-65$  dB em malha fechada (figura 16), com um valor do ganho  $G = 800$  ( $G = G_{amp} \times \text{Sens.}_{laser}$ ).

O valor das razões de amortecimento experimentais e numéricas dos quatro primeiros modos, determinadas pelo método dos 3dB, para diferentes valores de ganho, é apresentado nas figuras 17 e 18,

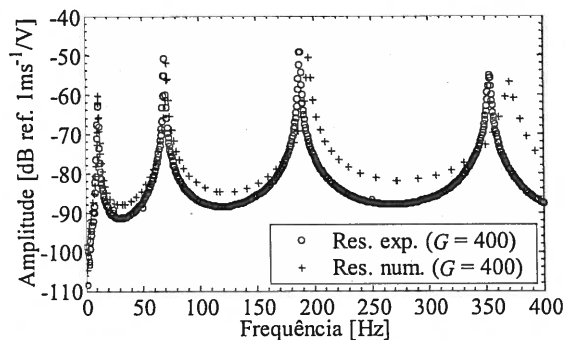


Fig. 14 - Função de resposta em frequência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

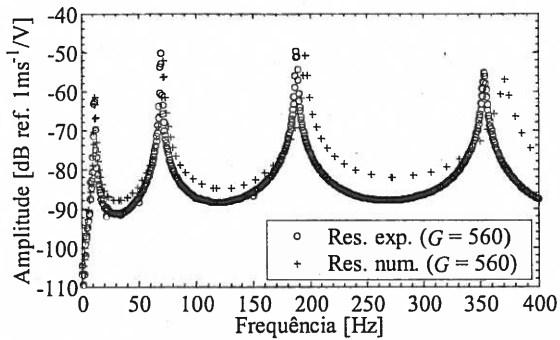


Fig. 15 - Função de resposta em frequência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

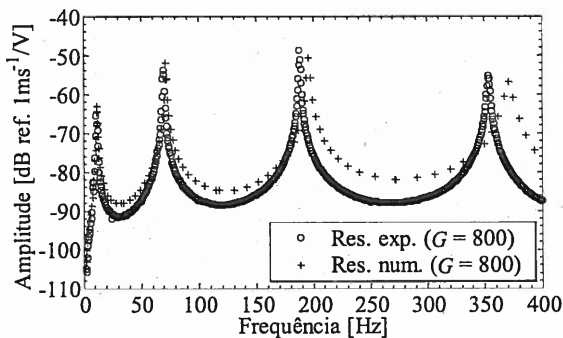


Fig. 16 - Função de resposta em frequência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

respectivamente. Nas figuras é possível constatar-se que o comportamento da razão de amortecimento determinada com o modelo experimental é idêntico ao obtido com o modelo numérico. Em ambos os modelos os três últimos modos permanecem com uma razão de amortecimento aproximadamente constante. Assim, uma vez que o filtro passa-banda (10-12 Hz) foi regulado ao primeiro modo, apenas esse modo é amortecido. No entanto, apesar de se observar a mesma tendência entre os modelos, o modelo numérico subestima a razão de amortecimento. Esse facto deve-se à limitação da resolução (no domínio da frequência) do analisador dinâmico de sinal (1024 linhas) que, para uma banda de frequência de 400 Hz, conduz a resultados pouco precisos nas zonas próximas das frequências de ressonância. Dessa forma, a determinação da razão de amortecimento pelo método dos 3dB, fortemente dependente do valor de pico das frequências de ressonância, sobrestima o valor efectivo da razão de amortecimento.

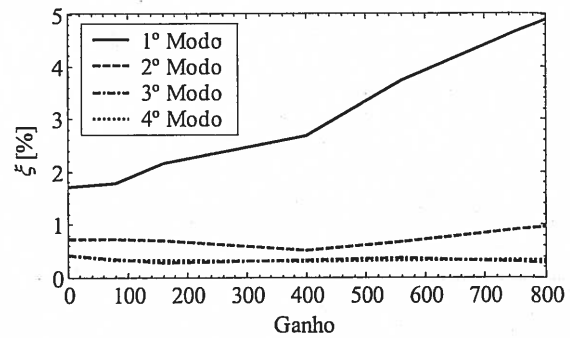


Fig. 17 - Razão de amortecimento modal obtida com o modelo experimental.

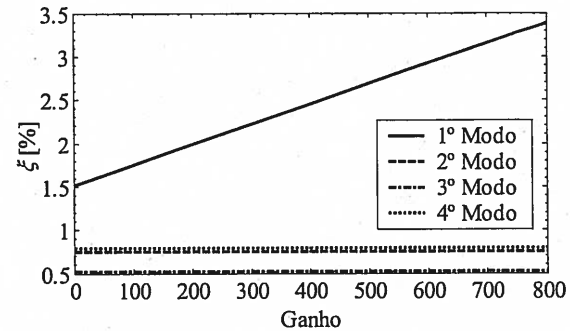


Fig. 18 - Razão de amortecimento modal obtida com o modelo numérico.

Como referido anteriormente, e de forma a poder otimizar a razão de amortecimento do primeiro modo sem excitar os modos pares, torna-se necessário filtrar o sinal de *feedback*. Nas figuras 19-22 são apresentadas as funções de resposta em frequência do sistema em malha fechada, para valores de ganho distintos, sem recorrer à filtragem do sinal de *feedback*.

Os resultados numéricos e experimentais demonstram que para valores de ganho positivos crescentes os modos pares são excitados e os ímpares amortecidos (figuras

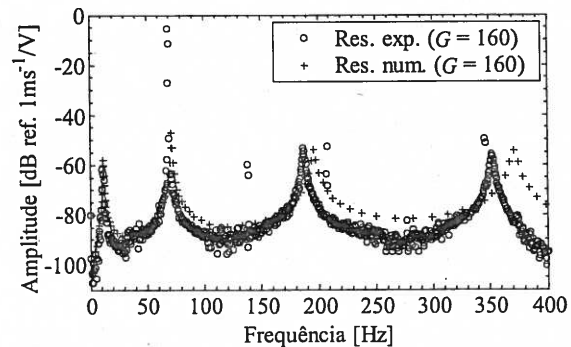


Fig. 19 - Função de resposta em frequência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada com *feedback* da velocidade não filtrada.

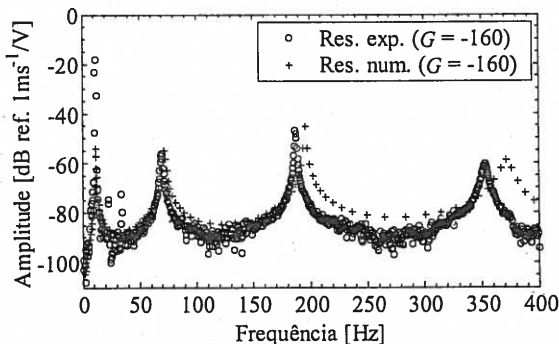


Fig. 20 - Função de resposta em frequência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada com *feedback* da velocidade não filtrada.

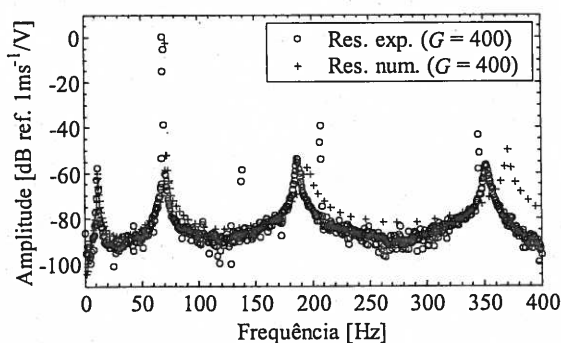


Fig. 21 - Função de resposta em frequência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada com *feedback* da velocidade não filtrada.

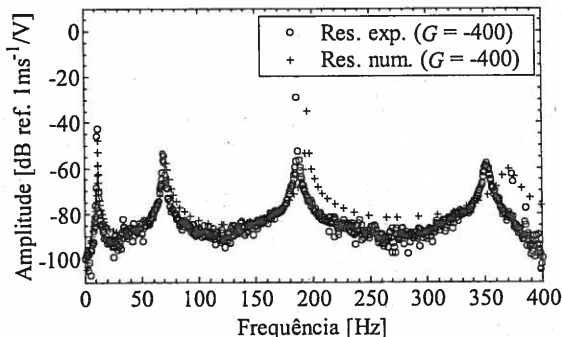


Fig. 22 - Função de resposta em frequência entre a velocidade e a tensão do actuador em malha fechada com *feedback* da velocidade não filtrada.

19 e 21). Porém, quando o valor do ganho é negativo, o comportamento oposto é observado (figuras 20 e 22), confirmando-se, assim, as indicações fornecidas pelo lugar geométrico das raízes do sistema em malha fechada (figuras 8 e 9).

#### Resultados: regime livre

As respostas (velocidade) em regime livre, medidas a 15 mm da extremidade livre, para um campo de deslocamentos inicial correspondente a uma flecha de 5 mm da

viga no ponto de medição do transdutor *laser*, são apresentadas nas figuras 23-27. Na figura 23 é apresentada a resposta em malha aberta determinada com o modelo experimental e numérico. Novamente, os dois resultados apresentam uma boa concordância entre si.

Da mesma forma que na secção anterior, um filtro passa-banda (10-12 Hz), regulado ao primeiro modo, foi utilizado no modelo de controlo experimental e numérico. As respostas em malha fechada, obtidas para diferentes valores do ganho, são apresentadas nas figuras 24-27. As tensões de controlo para os diferentes valores de ganho, determinadas numericamente, são também apresentadas nessas figuras.

Para os diferentes valores de ganho observa-se uma pequena diferença entre as respostas experimentais e numéricas. Essa diferença, independente do valor do ganho, pode dever-se à implementação do filtro passa-banda. Por um lado, no modelo experimental, a eficiência do filtro não é perfeita e o corte das componentes harmónicas do sinal de *feedback* fora da banda útil (10-12 Hz) é realizado de uma forma aproximada. No entanto, no modelo numérico, esse filtro é modelizado de uma forma exacta. Dessa forma, o modelo numérico reflecte condições óptimas de funcionamento, difíceis de reproduzir experimentalmente. Porém, para os mesmos valores de ganho de controlo, ambos os modelos apresentam comportamentos idênticos.

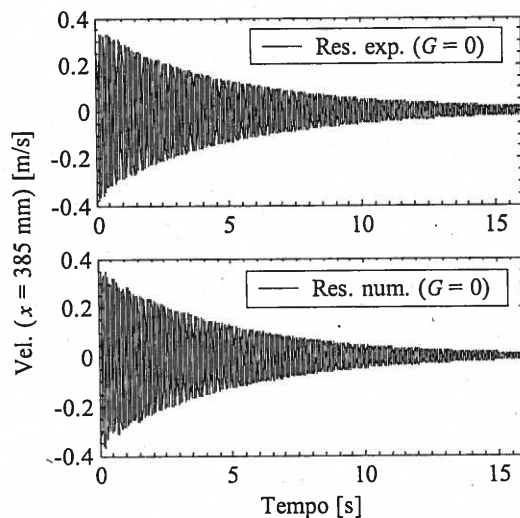


Fig. 23 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) do sistema em malha aberta.

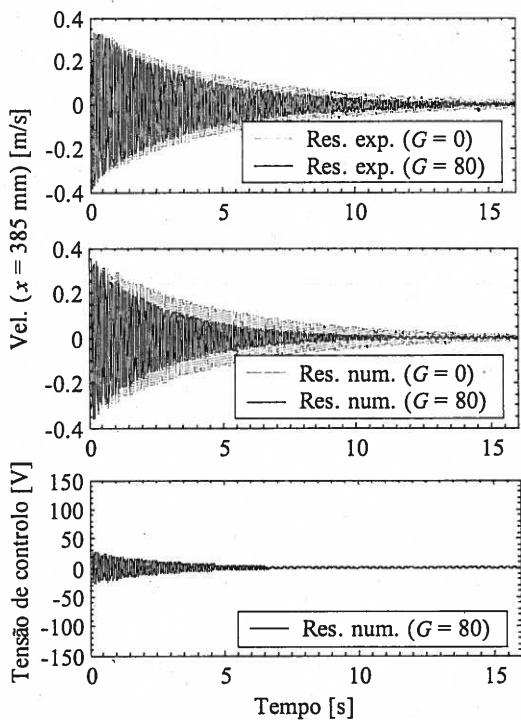


Fig. 24 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

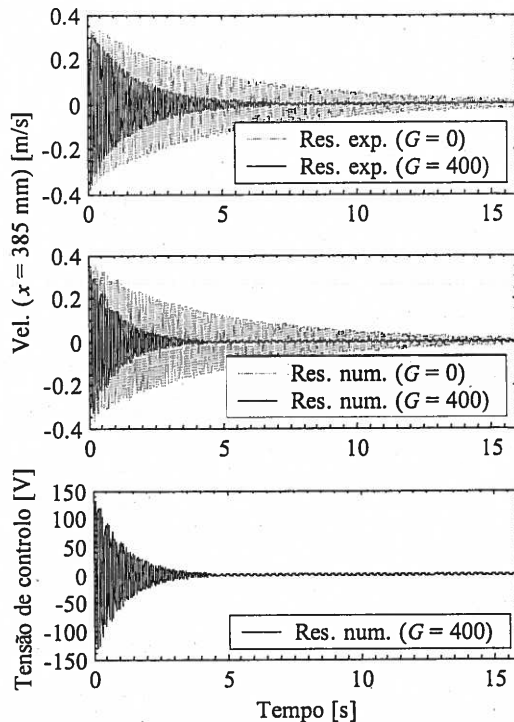


Fig. 25 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

A tensão de controlo, proporcional à velocidade da viga no ponto de medição, aumenta com o valor do ganho. No ensaio experimental, a tensão de alimentação, limitada pela tensão máxima do amplificador ( $\pm 150$  V), foi regulada para  $\pm 120$  V. No entanto, para valores de ganho inferiores a cerca de 300, a tensão de controlo não ultrapassa o valor regulado. Porém, para valores superiores do ganho, o modelo numérico, sem limitação da tensão de controlo, sobrestima o comportamento real sem que diferenças muito significativas sejam encontradas.

As razões de amortecimento das respostas obtidas com o modelo experimental e numérico, determinadas através do decremento logarítmico para os diferentes valores do ganho de controlo, são apresentadas na figura 28.

Pelas mesmas razões referidas anteriormente, por um lado a limitação da tensão de controlo e, por outro, a implementação do filtro, em regime livre o modelo numérico sobrestima a razão de amortecimento. Nesse caso, a resolução no domínio do tempo (2048 linhas) não será

um parâmetro tão importante como na função de resposta em frequência e os resultados são mais influenciados pela implementação experimental do filtro passa-banda. Com efeito, na obtenção da resposta do modelo experimental foi considerada uma banda de frequência de 100 Hz, considerada com resolução suficiente para a correcta definição da resposta no tempo. Um comportamento aproximadamente linear, semelhante ao determinado com o modelo numérico, foi obtido com o modelo experimental (figura 28).

O tempo de estabelecimento a 2% [12] da resposta numérica e experimental em função do ganho de controlo é apresentado na figura 29. Pelas mesmas razões que influenciaram o valor da razão de amortecimento, o tempo de estabelecimento da resposta numérica subestima o valor determinado com a resposta experimental. No entanto, o mesmo tipo de comportamento é obtido.

De forma a demonstrar a capacidade do modelo numérico para prever instabilidades no sistema de controlo, foi ainda medida

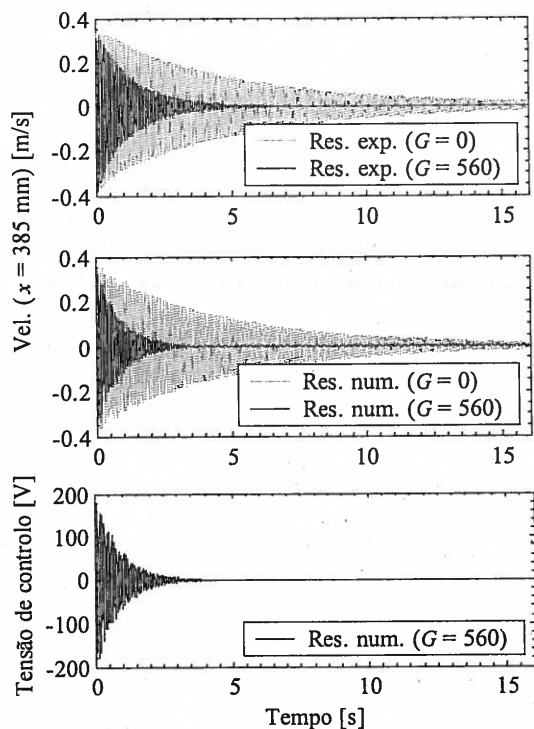


Fig. 26 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

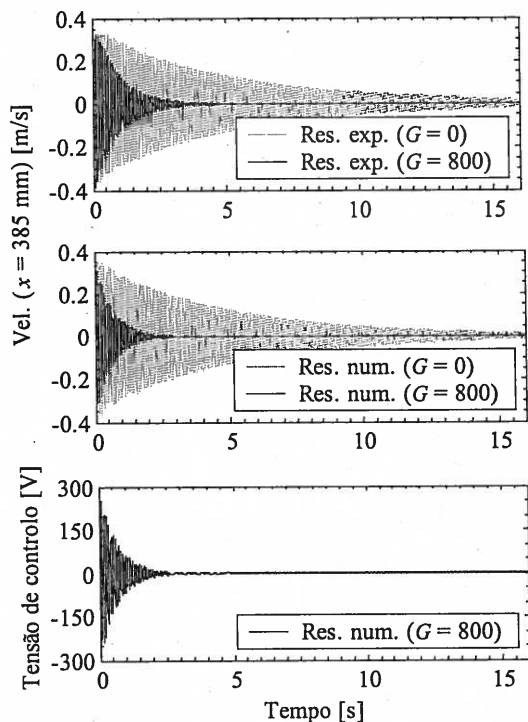


Fig. 27 - Resposta em regime livre (numérica e experimental) e tensão de controlo (numérica) do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

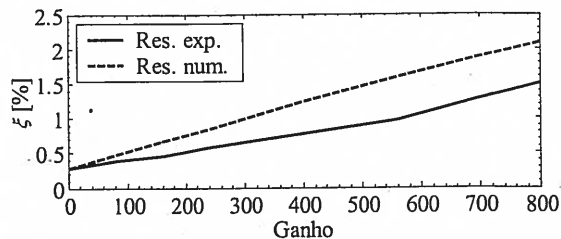


Fig. 28 - Razão de amortecimento da resposta em regime livre dos modelos experimental e numérico em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

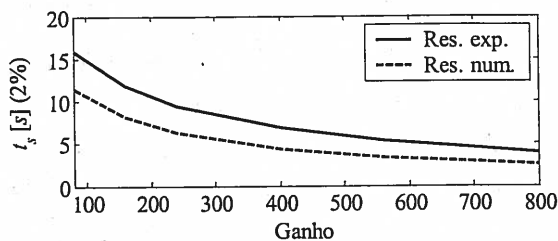


Fig. 29 - Tempo de estabelecimento a 2 % das respostas dos modelos experimental e numérico em malha fechada com *feedback* da velocidade filtrada.

experimentalmente a resposta em regime livre com o sinal de *feedback* sem ser filtrado. Como se pode observar nas figuras 30 e 31, para um valor de ganho de  $G = 200$ , a resposta começa por ser inicialmente amortecida e, a partir de determinado instante, começa a ser desestabilizada. Uma vez que o campo de deslocamento inicial aplicado excita fundamentalmente o primeiro modo, a resposta, na fase inicial, representa maioritariamente a contribuição do primeiro modo. Assim, ao mesmo tempo que o primeiro modo começa a ser amortecido, o segundo modo, menos controlável (ver figura 9), começa a ser excitado até que a viga entra em ressonância para o segundo modo. Da mesma forma, para valores de ganho superiores, o primeiro modo é amortecido mais rapidamente, mas, em contrapartida, o segundo modo é igualmente desestabilizado mais rapidamente.

Devido ao facto da tensão de controlo não poder crescer indefinidamente (limitada a  $\pm 120$  V), note-se nas figuras 30 e 31 que a resposta experimental para o valor de ganho  $G = 240$ , contrariamente à resposta numérica, estabiliza com uma amplitude de cerca de 0.75 m/s.

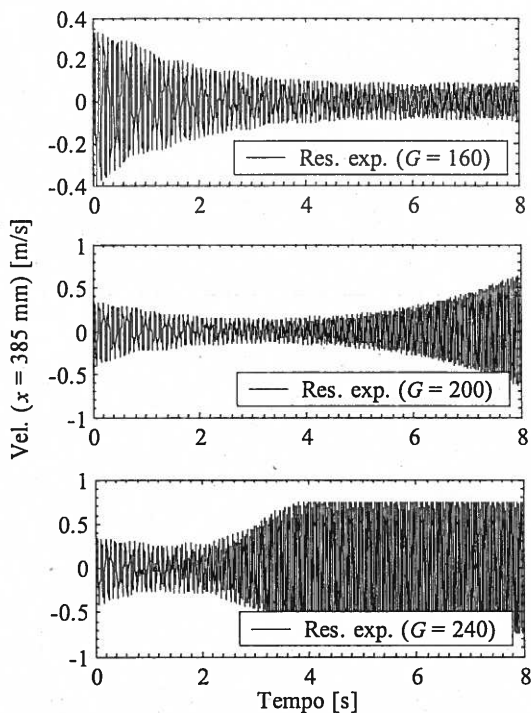


Fig. 30 - Resposta em regime livre (experimental) do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade não filtrada.

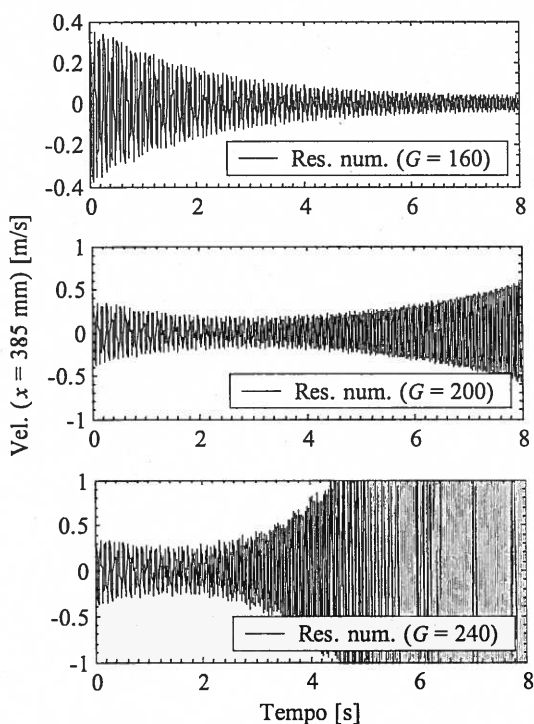


Fig. 31 - Resposta em regime livre (numérica) do sistema em malha fechada com *feedback* da velocidade não filtrada.

## 5. CONCLUSÃO

Da análise experimental verificou-se que a colagem das cerâmicas piezoelétricas condiciona fortemente o desempenho do

sistema *inteligente*. Uma correcta colagem deverá ser efectuada de forma a garantir uma boa transmissibilidade de esforços na interface com a viga. Dessa forma, a análise estática permitiu demonstrar a eficiência da colagem através da capacidade de actuação das cerâmicas piezoelétricas, tendo-se obtido uma boa concordância entre o modelo numérico e o experimental.

O sistema de controlo por *feedback* da velocidade, utilizando um transdutor *laser* como sensor, mostrou-se eficiente no controlo de vibrações. Com este esquema de controlo, foram obtidas razões de amortecimento consideráveis com um esforço de controlo admissível, quer em regime livre quer em regime forçado. Porém, os resultados numéricos e experimentais mostraram que elevados ganhos de controlo podem desestabilizar determinados modos. Para evitar este fenómeno recorreu-se à filtragem do sinal de forma a controlar especificamente um determinado modo, tendo sido demonstrado, na aplicação em causa, que esse tipo de controlo é bastante eficiente no amortecimento do primeiro modo.

Assim, o elemento finito desenvolvido demonstrou, através da comparação dos resultados numéricos com os experimentais, uma elevada robustez e fiabilidade na obtenção da resposta mecânica e eléctrica de vigas *inteligentes*. Além disso, o modelo numérico proposto constitui uma ferramenta particularmente interessante na antevisão e resolução de eventuais instabilidades, permitindo, numa fase de concepção do sistema de controlo, analisar e definir a melhor solução para o controlo activo de vibrações. Dessa forma, a implementação experimental é facilitada e a sua performance é melhorada.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação para a Ciência e a Tecnologia a Bolsa de Investigação Científica concedida no âmbito do financiamento plurianual das unidades de investigação.

## REFERÊNCIAS

- [1] A. V. Srinivasan and D. M. McFarland, *Smart structures: Analysis and design*. Cambridge: University Press, 2001.
- [2] I. Chopra, "Review of state of art of smart structures and integrated systems". *AIAA Journal*, vol. 40(11), pp. 2145-2187, 2002.
- [3] A. Preumont, *Vibration control of active structures: An introduction*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- [4] C. R. Fuller, S. J. Elliott and P. A. Nelson, *Active control of vibration*. London: Academic Press, 1996.
- [5] R. L. Clark, W. R. Saunders and G. P. Gibbs, *Adaptive structures: Dynamics and control*. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [6] J. A. Waanders, *Piezoelectric ceramics: Properties and applications*. Eindhoven: Philips Components, 1991.
- [7] American Piezo Ceramics, *Piezoelectric ceramics: Principles and applications*. Pennsylvania: APC International, 2002.
- [8] A. Ghoshal, E. A. Wheeler, C. R. A. Kumar, M. J. Sundaresan, M. J. Schulz, M. Human and P. F. Pai, "Vibration suppression using a laser vibrometer and piezoceramic patches". *Journal of Sound and Vibration*, vol. 235(2), pp. 261-280, 2000.
- [9] C. M. A. Vasques and J. D. Rodrigues, "Coupled three-layered analysis of smart piezoelectric beams with different electric boundary conditions". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62(11), pp. 1488-1518, 2005.
- [10] C. M. A. Vasques, "Modelização do controlo activo de vibrações de vigas com sensores e actuadores piezoeléctricos". *Tese de Mestrado, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto*, Porto, 2003.
- [11] A. Benjeddou, "Advances in piezoelectric finite element modelling of adaptive structural elements: A survey". *Computers and Structures*, vol. 76(1-3), pp. 347-363, 2000.
- [12] J. B. Burl, *Linear optimal control*. California: Addison-Wesley, 1999.
- [13] H. S. Tzou, *Piezoelectric shells: Distributed sensing and control of continua*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [14] K. Zaveri, "Modal analysis of large structures - multiple exciter systems". *Bruel & Kjaer Technical Review*, 1985.