

# INSTABILIDADE DE VIGAS A ALTAS TEMPERATURAS – ESTUDO NUMÉRICO E EXPERIMENTAL

Mesquita, L. M. R.<sup>1</sup>; Piloto, P.A.G.<sup>2</sup>; Vaz, M.A.P.<sup>3</sup>; Vila Real, P.M.M.<sup>4</sup>; Franssen, J.- M.<sup>5</sup>

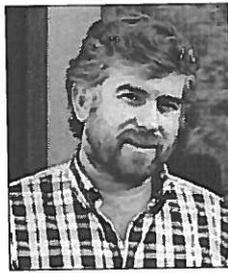
<sup>1</sup> – Assistente, DMA-ESTIG, Instituto Politécnico de Bragança

<sup>2</sup> – Professor Coordenador, DMA-ESTIG, Instituto Politécnico de Bragança

<sup>3</sup> – Professor Associado, DEMEGI – FEUP, Universidade do Porto

<sup>4</sup> – Professor Catedrático, DEC, Universidade de Aveiro

<sup>5</sup> – Professeur Directeur de Recherche - Institut du Génie Civil, Université de Liège, Belgique



## RESUMO

*A verificação da segurança de vigas em aço sem constrangimentos laterais passa pela verificação da instabilidade à encurvadura lateral torsional. Quando uma viga é sujeita à acção de acidente de um incêndio, o colapso pode ocorrer para uma determinada temperatura, designada temperatura crítica. Neste trabalho é utilizado o método dos elementos finitos, programa SAFIR, para a obtenção da temperatura crítica de vigas com diferentes valores de esbelteza, para um grau de utilização  $\mu_0 = 0.6$ . Todos os valores numéricos obtidos são superiores ao especificado pelo Eurocódigo 3 Parte 1.2, para vigas com constrangimentos laterais. É ainda apresentada uma descrição dos ensaios experimentais à escala real com vista à validação dos resultados numéricos.*

## 1 INTRODUÇÃO

O dimensionamento de estruturas e elementos metálicos passa pela verificação da segurança quando submetidas às várias acções envolvidas. Exemplo das acções a ter em consideração são as acções accidentais, das quais fazem parte a exposição da estrutura, ou parte da mesma, ao fogo. É fundamental saber avaliar a resistência dos elementos estruturais, quando sujeitos à acção do fogo, garantindo a segurança durante o período de tempo necessário (Vila Real, 2003). Tal situação provoca um aumento das deformações térmicas e submete o elemento estrutural a um estado não linear, geométrico e material, que é acompanhado pela diminuição progressiva da capacidade resistente. Devido à degradação das

propriedades mecânicas é previsível que uma situação de instabilidade seja atingida para uma dada temperatura limite, designada por temperatura crítica.

A verificação da segurança de vigas em relação ao estado limite último deve considerar o fenómeno de instabilidade por encurvadura lateral torsional (ELT), também designado por bambeamento. De acordo com o Eurocódigo 3 Parte 1.2 (CEN prEN, 2003), o cálculo estrutural ao fogo pode ser efectuado através de métodos de cálculo simplificados (válidos para elementos estruturais isolados), métodos de cálculo avançados ou com o recurso a ensaios experimentais.

Numa análise por elementos, a verificação da resistência ao fogo pode ser feita em três

domínios diferentes (tempo, resistência e temperatura).

Embora a verificação, no domínio da resistência, de vigas sujeitas ao fenómeno de ELT sob a acção do fogo se encontre bem documentada, no domínio da temperatura tal já não acontece. A relação apresentada entre a temperatura crítica e o grau de utilização só é válida para elementos traccionados e flectidos sem risco de ocorrência de fenómenos de instabilidade.

## 2 ENCURVADURA LATERAL TORSIONAL DE VIGAS

### 2.1 Considerações Teóricas

Quando uma viga metálica I é sujeita à flexão segundo o eixo mais resistente, ver a Fig 1, um dos banzos é comprimido. Se este não se encontra constrangido lateralmente, a instabilidade por encurvadura lateral torsional pode ocorrer.

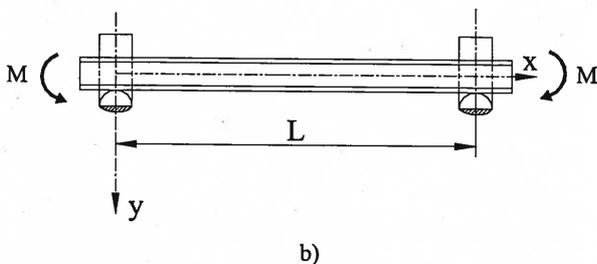
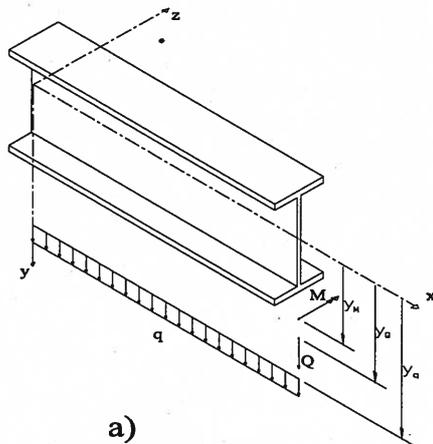


Fig 1- a) Coordenadas do ponto de aplicação do carregamento. b) Viga sujeita a flexão uniforme.

Considerando o perfil I da Fig 1a) na sua configuração indeformada, o referencial

apresentado possui o eixo longitudinal  $x$  coincidente com o centro de corte das secções rectas. Adoptando as hipóteses de Vlassov, válidas para elementos de parede fina, pequenas deformações e um estado linear de pré-encurvadura, para perfis I duplamente simétricos, o termo de segunda ordem do desenvolvimento em série de Taylor da energia potencial total ( $\Pi$ ) em torno de um estado de equilíbrio é dado por (Trahair, 1993).

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ EI_y (w'')^2 + EI_w (\phi'')^2 + GJ (\phi')^2 \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^L M_z (2\phi w'') dx + \frac{1}{2} \int_0^L q_y y_q \phi^2 dx + \frac{1}{2} \sum Q_y y_Q \phi^2 = 0 \quad (1)$$

$w(x)$  e  $\phi(x)$  representam as variações dos deslocamentos segundo  $Z$  e das rotações segundo o eixo longitudinal.  $EI_y, EI_w$  e  $GJ$  representam a rigidez à flexão lateral, ao empenamento e à torção.

Para o caso de uma viga submetida a um estado de flexão uniforme, Fig 1b), com ambas as extremidades apoiadas em apoios de forquilha (rotação e empenamento livre), pode admitir-se que as variações de deslocamento e rotação verificam as equações de equilíbrio apresentadas em (Trahair, 1993), para as quais são admitidas variações sinusoidais do deslocamento lateral e rotação ( $w/\delta = \phi/\theta = \sin(\pi x/L)$ ). O momento crítico elástico,  $M_{cr,M}$ , é obtido pela equação (2):

$$M_{cr,M} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \sqrt{\frac{I_w}{I_y} + \frac{L^2 GJ}{\pi^2 EI_y}} \quad (2)$$

Quando a viga é submetida a um carregamento composto por uma força concentrada  $Q_y$ , a meio vão, e por uma carga distribuída aplicada no centróide,  $q_y$ , ver Fig 4, o momento crítico elástico do caso em análise ( $M_Q + M_q$ ) é obtido pela equação (3).

$$\frac{M_Q + M_q}{M_{cr,M}} = 1,423 \left[ \sqrt{1 + \left(0,577 \frac{P_y y_Q}{M_{cr}}\right)^2} - 1,003 \frac{P_y y_Q}{M_{cr,M}} M_q + 0,577 \frac{P_y y_Q}{M_{cr,M}} - 0,167 \frac{M_q}{M_{cr,M}} \right] \quad (3)$$

$$\text{em que } M_Q = \frac{QL}{4}, M_q = \frac{qL^2}{8}, P_y = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}.$$

## 2.2 Considerações Regulamentares

Quando um elemento estrutural se encontra submetido a um carregamento mecânico e é simultaneamente sujeito a temperaturas elevadas, a degradação das propriedades mecânicas do material pode originar o seu colapso, por diminuição da capacidade resistente. O Eurocódigo 3 Parte 1.2 (CEN prEN, 2003) define o valor das propriedades mecânicas, para uma determinada temperatura, com base nas propriedades à temperatura ambiente, utilizando factores de redução. A variação do limite de proporcionalidade,  $f_{p,\theta}$ , do módulo de elasticidade,  $E_{a,\theta}$  e da tensão de cedência,  $f_{y,\theta}$ , com a temperatura é representada na Fig 2.

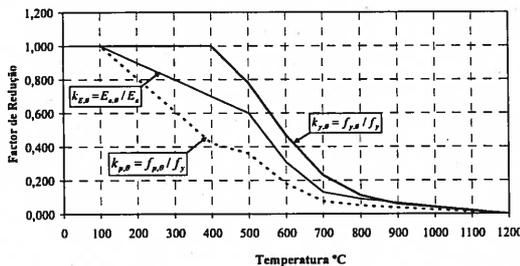


Fig 2- Factores de redução das propriedades mecânicas.

### 2.2.1 Domínio da resistência

No domínio da resistência, um elemento estrutural pode considerar-se estável durante a acção do fogo, quando se verificar a inequação:

$$E_{fi,d} \leq R_{fi,d,t} \quad (4)$$

em que  $E_{fi,d}$  representa o valor de projecto do efeito das acções exercidas sobre o elemento, que no caso de uma situação de acidente deve ser determinado em função da combinação acidental (CEN ENV, 1995).

$$E_{fi,d} = \sum \gamma_{GA} G_k + \psi_{1,i} Q_{k,1} + \sum \psi_{2,i} Q_{k,i} + \sum A_d(t) \quad (5)$$

$R_{fi,d,t}$  representa o valor de cálculo da capacidade resistente do elemento. O momento resistente à encurvadura de vigas com secção recta das classes 1 e 2, sem constrangimentos laterais,  $M_{b,fi,t,Rd}$ , no instante  $t$  deverá ser determinado por (CEN prEN, 2003):

$$M_{b,fi,t,Rd} = \chi_{LT,fi} W_{pl,y} k_{y,\theta,com} f_y / \gamma_{M,fi} \quad (6)$$

em que  $\chi_{LT,fi}$  representa o factor de redução para a encurvadura lateral torsional, em situação de incêndio.  $k_{y,\theta,com}$  representa o factor de redução da tensão de cedência do aço para a temperatura máxima existente no banzo à compressão,  $\theta_{a,com}$ , no instante  $t$ . Pode admitir-se, de forma conservativa, uma distribuição uniforme da temperatura em todo o elemento,  $\theta_a$ , igual à temperatura máxima existente no banzo.

O valor de  $\chi_{LT,fi}$  deve ser determinado de acordo com a seguinte expressão:

$$\chi_{LT,fi} = \frac{1}{\phi_{LT,\theta,com} + \sqrt{[\phi_{LT,\theta,com}]^2 - [\bar{\lambda}_{LT,\theta,com}]^2}} \quad (7)$$

com

$$\phi_{LT,\theta,com} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \alpha \bar{\lambda}_{LT,\theta,com} + (\bar{\lambda}_{LT,\theta,com})^2 \right] \quad (8)$$

$$\alpha = 0,65 \sqrt{235/f_y}$$

A esbelteza adimensional no instante  $t$  é determinada em função da esbelteza adimensional, à temperatura ambiente através de:

$$\bar{\lambda}_{LT,\theta,com} = \bar{\lambda}_{LT} \sqrt{k_{y,\theta,com} / k_{E,\theta,com}} \quad (9)$$

## 2.2.2 Domínio da temperatura

Como alternativa ao ponto anterior, a verificação da resistência ao fogo pode ser feita no domínio da temperatura, estabelecendo-se como limite o valor da temperatura crítica, ver Fig 3.

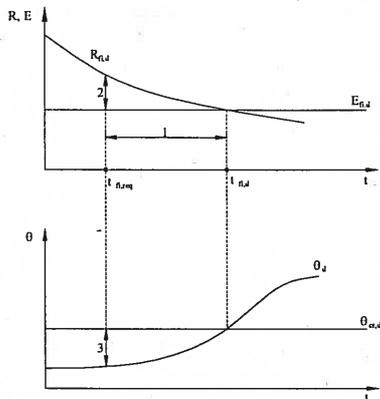


Fig 3- Domínios de verificação de resistência ao fogo.

O limite de segurança,  $E_{fi,d} = R_{fi,d,t}$ , é estabelecido para um determinado valor do factor de redução da tensão de cedência,  $k_{y,\theta}$ , relacionado com o valor da temperatura crítica,  $\theta_{a,cr}$ . Se a resistência  $R_{fi,d,t}$  for directamente proporcional à tensão de cedência do aço,  $\mu_0 = k_{y,\theta}$ , sendo a temperatura crítica determinada por (CEN prEN, 2003):

$$\theta_{a,cr} = 39,19 \ln \left[ \frac{I}{0,9674 \mu_0^{3,833}} - I \right] + 482 \quad (10)$$

O grau de utilização,  $\mu_0$ , é definido pelas acções e pela capacidade resistente no instante  $t=0$ , isto é, à temperatura ambiente, mas com o valor das propriedades do material calculadas para o instante  $t$ .

$$\mu_0 = \frac{E_{fi,d}}{R_{fi,d,0}} \quad (11)$$

## 3 CASO DE ESTUDO

Num caso real de incêndio, um elemento estrutural encontra-se inicialmente submetido a um carregamento mecânico, sendo posteriormente submetido a uma

solicitação térmica, provocada pela acção do fogo.

Neste trabalho será determinado o valor da temperatura crítica para vigas tipo IPE100 com diferentes comprimentos, sob acção de um carregamento mecânico constante, ver Fig 4, determinado através da equação (11) para um grau de utilização igual a 60%. As vigas encontram-se submetidas a uma força concentrada a meio vão, aplicada no banzo superior, e a um carregamento uniformemente distribuído  $q_y = 208,07$  [N/m], aplicado no eixo que passa no centróide da secção. A carga distribuída corresponde ao peso das resistências eléctricas e da manta de isolamento térmico que envolvem o elemento de viga, enquanto que a carga concentrada é calculada para o valor do grau de utilização pretendido, Fig 9.

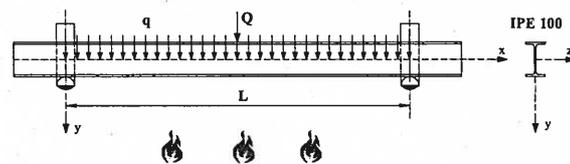


Fig 4- Modelo de carregamento em vigas IPE100.

O aquecimento será realizado com incrementos sucessivos da temperatura, de acordo com uma taxa de aquecimento pré definida de 800 [°C/h]. Para taxas de aquecimento entre 2-50 [°C/min] é possível utilizar as relações entre tensão e deformação apresentadas no Eurocódigo 3 Parte 1.2 (CEN prEN, 2003).

A tabela 1 apresenta o valor da carga concentrada  $Q$  aplicada em cada um dos comprimentos de viga estudados. O método de cálculo é apresentado no ANEXO 1.

Tabela 1- Valor da carga concentrada para cada comprimento de viga estudado.

Comprimento [L]	Carga concentrada, Q[N]
1.5	10964.14
2.5	4310.10
3.5	2151.65
4.5	1129.90
5.5	534.42

## 4 MODELO NUMÉRICO

As simulações numéricas foram realizadas utilizando o programa SAFIR, especialmente desenvolvido na Universidade de Liège para o estudo de estruturas sob a acção do fogo (Franssen et al, 2002).

O modelo numérico foi analisado com elementos de casca com seis graus de liberdade por nó, adequados à modelação de superfícies estruturais planas, empenadas, finas ou moderadamente espessas. As funções de interpolação são lineares nas duas direcções da superfície.

A secção transversal é modelada a partir da superfície média do perfil e o modelo do comportamento material utiliza uma relação elasto-elíptico-plástico, entre a tensão e a deformação, de acordo com o Eurocódigo 3 parte 1.2 (CEN pr EN, 2003).

Foi considerada uma imperfeição geométrica inicial, com forma sinusoidal relativamente ao deslocamento lateral  $w(x)$ , utilizando uma amplitude máxima a meio vão de  $\delta = L/1000$ . O banzo e a alma foram discretizados com 4 elementos, ver Fig 5. As extremidades da viga encontram-se apoiadas com suportes de forquilha, possuindo deslocamento lateral e vertical impedido e empenamento livre.

Para todas as vigas em aço foram consideradas as seguintes propriedades à temperatura ambiente: módulo de elasticidade  $E = 210[GPa]$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$  e tensão de cedência  $f_y = 500 [MPa]$ . A temperaturas elevadas, o programa SAFIR utiliza a relação entre a tensão e a deformação, adaptada ao estado plano da tensão e deformação equivalente. A tensão de cedência e o módulo de elasticidade, a temperaturas elevadas, são dados por (de Sousa Júnior et al, 2001):

$$f_{y,\theta} = k_{y,\theta} f_y \quad \text{e} \quad E_{a,\theta} = k_{E,\theta} E_a \quad (12)$$

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Uma viga, na presença de um incêndio, é submetida a um aumento contínuo da temperatura, conduzindo à diminuição da

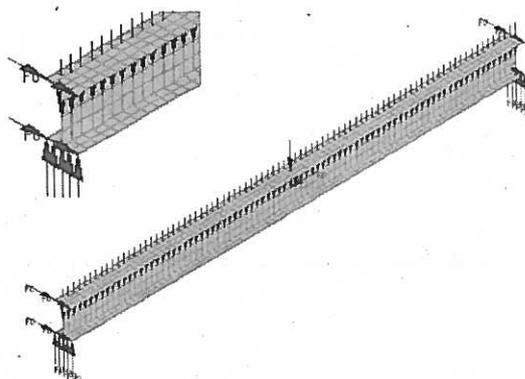


Fig 5- Discretização e condições de fronteira. Viga com  $L=1.5 [m]$

sua capacidade resistente e possível colapso. Quando uma viga sem constrangimentos laterais é sujeita a um carregamento mecânico e a uma acção térmica, a degradação das propriedades mecânicas e o facto de um dos banzos se encontrar à compressão, origina um movimento vertical, acompanhado por um deslocamento lateral e uma rotação da secção.

Na Fig 6 é possível observar que o deslocamento lateral a meio vão aumenta com a temperatura, até que uma pequena variação da temperatura produz um aumento muito significativo do deslocamento, originando perda de equilíbrio da viga.

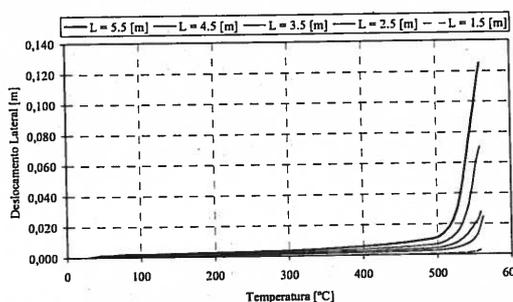


Fig 6- Deslocamento lateral no nó central da secção recta a meio vão.

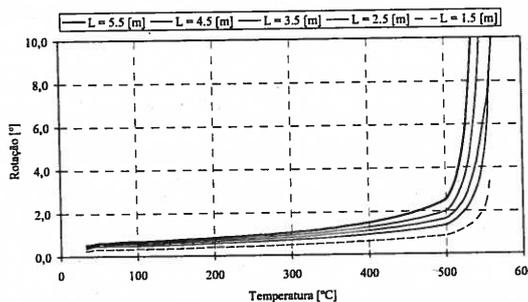


Fig 7- Rotação no nó central da secção recta a meio vão.

A rotação da secção recta a meio vão da viga, segundo o eixo longitudinal, correspondente ao nó central, é apresentada na Fig 7.

A temperatura crítica corresponde ao instante em que ocorre a perda de equilíbrio do elemento de viga, resultando os valores apresentados na Tabela 2. Os valores determinados podem ser comparados com o valor de referência da temperatura crítica, sem ocorrência de instabilidade (CEN prEN, 2003), para um grau de utilização de 60% ( $\theta_{a,cr} = 554^{\circ}C$ ). Os resultados numéricos são sempre superiores ao valor de referência.

**Tabela 2-** Resultados da temperatura crítica.

Comprimento [m]	Temperatura crítica [°C]	
	Resultados numéricos	Modelo simplificado
1.5	559.5	554
2.5	562.8	
3.5	559.5	
4.5	558.7	
5.5	559.5	

Na Fig 8 representa-se a configuração de deformada, correspondente ao limite resistente da viga.

De salientar que o modelo numérico não inclui tensões residuais. No entanto, análises efectuadas com elementos finitos de viga com tensões residuais, entre 200-700°C, mostram que o seu efeito diminui com o aumento da temperatura, sendo a diferença de resultados insignificante para valores superiores a 400°C (Vila Real et al, 2003).

## 6 ENSAIOS EXPERIMENTAIS

A implementação de um estudo experimental sobre os parâmetros que influenciam o comportamento das vigas sujeitas ao fogo, é de difícil execução devido aos custos inerentes e limitações na dimensão das fornalhas. Portanto é de esperar que os ensaios realizados representem os casos mais comuns, como as vigas que suportam lajes, quer estas se encontrem ligadas pelo banzo superior através de pernos ou embebidas entre os banzos. Em ambos os casos, o banzo à compressão encontra-se estrangido lateralmente, não ocorrendo



**Fig 8** – Estado limite último de uma viga com 2,5 [m] (ampliação 10 vezes).

instabilidade por encurvadura lateral torsional (Bailey et al, 1996). Pode-se considerar então que o projecto de vigas sem estrangimentos laterais poderá assumir uma importância secundária. No entanto no caso de edificios ou pavilhões industriais as vigas podem não possuir estes estrangimentos.

Existem poucos estudos experimentais envolvendo a encurvadura lateral torsional de vigas a temperaturas elevadas. Piloto e Vila Real (Piloto et al, 2000) conduziram uma série de ensaios à escala real em vigas IPE100 a temperaturas elevadas, 200-600°C. O carregamento mecânico foi aplicado após estabilização da temperatura pretendida, obtendo-se a carga de colapso das vigas (domínio da resistência).

Com o objectivo de validar os resultados numéricos apresentados, foram efectuados ensaios experimentais, à escala real, utilizando vigas com diferentes valores de esbelteza. O carregamento mecânico consiste na aplicação de uma carga concentrada constante e aplicada no banzo superior da viga, a meio vão, conduzindo a um grau de utilização de 60%. Posteriormente ao carregamento mecânico será aplicada a sollicitação térmica, através de uma taxa de aquecimento de 800 [°C/h], aproximando desta forma o efeito da acção térmica de um incêndio real.

Como se pretende que a carga a aplicar permaneça constante durante o ensaio, não foi possível a utilização de actuadores hidráulicos. O aumento da temperatura provocaria uma diminuição da rigidez e por consequência uma diminuição da carga aplicada pelo actuador. O sistema

alternativo idealizado recorre a um mecanismo de carga permanente, conforme representado na Fig 9.

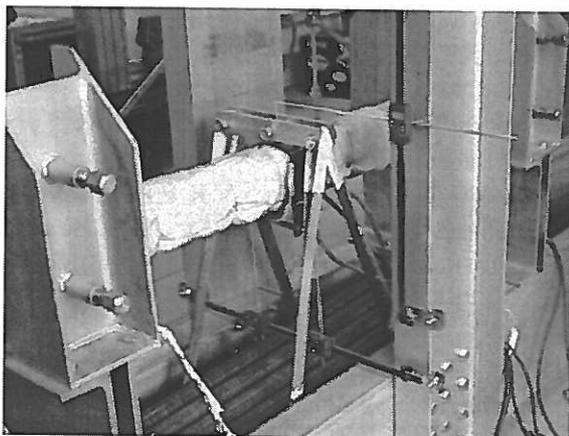
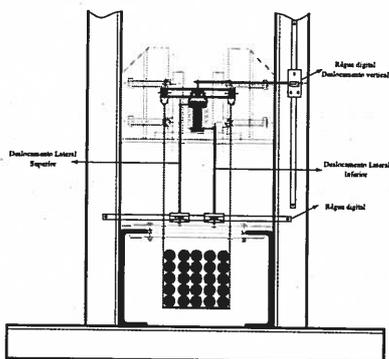


Fig 9 – Sistema de aplicação da carga “Q” a utilizar no pórtico de reacção.

O aquecimento das vigas foi efectuado com resistências eléctricas ligadas a um sistema de aquecimento, sendo utilizada uma manta de fibra cerâmica com malha de aço inoxidável para aumentar a eficiência térmica do processo.

Para controlar a temperatura da viga, o sistema de aquecimento dispõe de um controlador programável que possibilita o controlo do aquecimento e do arrefecimento ao longo do tempo. O registo da temperatura é efectuado por meio de termopares do tipo K soldados à viga.

Nos ensaios experimentais, foram medidos os deslocamentos laterais e verticais, em função do incremento da temperatura a que cada viga foi submetida.

## 7 CONCLUSÕES

Foi apresentado o método de cálculo simplificado do Eurocódigo 3 Parte 1.2 no domínio da resistência e da temperatura. O

domínio da temperatura requer o conhecimento da temperatura crítica. A relação entre a temperatura crítica e o grau de utilização fornecida pelo Eurocódigo 3 Parte 1.2 não é válida para os casos de instabilidade.

Através do método dos elementos finitos, foi apresentado um procedimento para a obtenção da temperatura crítica de vigas sem constrangimentos laterais, sujeitas à instabilidade por encurvadura lateral.

Para um grau de utilização de 60%, a temperatura crítica foi obtida numericamente. Para este caso de instabilidade o valor determinado é superior ao apresentado pelo Eurocódigo 3 Parte 1.2.

Para validar os valores numéricos obtidos foram efectuados os ensaios experimentais descritos, recorrendo aos sistemas apresentados, sendo os resultados superiores aos valores numéricos.

## ANEXO 1 – EXEMPLO DE CÁLCULO DA CARGA CONCENTRADA PARA $\mu_0 = 0.6$

O caso em estudo envolve o cálculo do valor da carga Q associado a um grau de utilização de 60%. O procedimento de cálculo é apresentado neste ponto.

Considere-se uma viga de comprimento igual a 2.5 [m] e sujeita ao carregamento da Fig 4, em que a força Q se encontra aplicada no banzo superior da viga, a uma coordenada  $y_Q = -0.05[m]$ .

O momento crítico elástico para esta viga é dado pela equação 3, sendo o seu valor igual a:

$$M_{cr,(Q+q)} = 8821.17 [Nm]$$

A esbelteza adimensional à temperatura ambiente é:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{LT} &= \sqrt{\beta_w \frac{W_{pl,y} f_y}{M_{cr}}} \\ &= \sqrt{1 \times \frac{3.941 \times 10^{-5} \times 500 \times 10^6}{8821.17}} = 1.495 \end{aligned}$$

Tomando em consideração um grau de utilização  $\mu_0 = 0.6$ , a temperatura crítica sem ocorrência de instabilidade é de  $\theta_{a,cr} = 554[^\circ\text{C}]$ . Para esta temperatura obtêm-se os coeficientes de redução  $k_{y,\theta,com} = 0,60$  e  $k_{E,\theta,com} = 0,432$ , sendo a esbelteza adimensional determinada com base nestes coeficientes.

$$\bar{\lambda}_{LT,\theta,com} = \bar{\lambda}_{LT} \sqrt{\frac{k_{y,\theta,com}}{k_{E,\theta,com}}} \\ = 1,495 \sqrt{\frac{0,60}{0,432}} = 1.762$$

O factor de redução para a encurvadura deve ser determinado de acordo com:

$$\phi_{LT,\theta,com} = \frac{1}{2} \left[ 1 + \alpha \bar{\lambda}_{LT,\theta,com} + (\bar{\lambda}_{LT,\theta,com})^2 \right] \\ = \frac{1}{2} \left[ 1 + (0.65 \sqrt{235/500}) 1.762 + (1.762)^2 \right] \\ = 2.445$$

$$\chi_{LT,fi} = \frac{1}{\phi_{LT,\theta,com} + \sqrt{[\phi_{LT,\theta,com}]^2 - [\bar{\lambda}_{LT,\theta,com}]^2}} \\ = 0.242$$

O valor de cálculo do momento resistente à encurvadura no instante  $t=0$  obtêm-se pela equação 6

$$M_{b,fi,0,Rd} = \chi_{LT,fi} W_{ply} k_{y,\theta,com} f_y / \gamma_{M,fi} \\ = 0.242 \times 3.941 \times 10^{-5} \times 1 \times 500 \times 10^6 / 1 \\ = 4768.61 [Nm]$$

Da equação 11, obtêm-se o valor da carga Q

$$\mu_0 = \frac{E_{f,d}}{R_{f,d,0}} = \frac{M_Q + M_q}{M_{b,fi,0,Rd}} \Leftrightarrow \frac{QL}{4} = \mu_0 \times M_{b,fi,0,Rd} - \frac{qL^2}{8} \\ Q = \left[ 0.6 \times 4768.61 - \frac{208.07 \times 2.5^2}{8} \right] \frac{4}{2.5} \\ = 4310.10 [N]$$

## REFERÊNCIAS

- [1] Bailey, C. G., Burgess, I. W., Plank, R. J.; "The Lateral-torsional Buckling of Unrestrained Steel Beams in Fire", J. Constr. Steel Research, 36 (2), 101-119, 1996.
- [2] CEN prEN 1993-1-2; "Eurocode 3, Design of Steel Structures – Part 1-2: General rules – Structural fire design"; Abril, 2003.
- [3] CEN ENV EN 1991 –2-2; "Eurocode 1, Basis of Design and Actions on Structures – Part 2-2: Actions on Structures – Actions on Structures Exposed to Fire"; 1995.
- [4] de Sousa Júnior, V., Franssen, J-M; "Lateral Buckling of steel I beams at elevated temperature. Comparison between the modeling with beam and shell elements", Rapport interne SPEC/2001/02, Université de Liège, 2001.
- [5] Franssen, J-M, Kodur, V.K.R., Mason, J., "User's Manual for SAFIR 2001 free, A computer Program for analysis of structures submitted to the fire", Université de Liège, April 2002.
- [6] Piloto, P.A.G., Vila Real, P.M.M, "Lateral torsional buckling of steel I-beams in case of fire – experimental evaluation", Proceedings of the first international workshop on structures in fire, Copenhagen, Denmark, p.99-105, 2000.
- [7] Trahair N.S.; "Flexural – Torsional Buckling of structures"; E&FN SPON – Chapman & Hall; London; 1993.
- [8] Vila Real, P., "Incêndio em estruturas metálicas. Cálculo estrutural", Edições Orion, 2003.
- [9] Vila Real P. M., Cazeli, R., Simões da Silva, L., Santiago, A., Piloto, P.; "The effect of residual stresses in lateral torsional buckling of steel I-beams at elevated temperature", J. Constr. Steel Research, vol 60, 3-5, pag 783-793, 2003.