

# SOBRE A EXTRAPOLAÇÃO DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM PROBLEMAS ESTRUTURAIS DE INSTABILIDADE E VIBRAÇÕES

Rui Carneiro de Barros

Prof. Associado Agregado, Departamento de Engenharia Civil  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Rua Roberto Frias, FEUP Edifício G-305, Porto, Email: [rcb@fe.up.pt](mailto:rcb@fe.up.pt)



## RESUMO

*A necessidade de desenvolvimento de técnicas de extrapolação, para uso eficiente de medições de quantidades experimentais, ocorre frequentemente na engenharia. Relativamente a experiências associadas a situações de instabilidade de colunas, vigas-coluna e estruturas, não recorrer a metodologias de extrapolação apropriadas poderá originar resultados indefinidos de deslocamentos, ou mesmo a ruína da própria barra ou estrutura. Situações semelhantes ocorrem em problemas de vibrações, em problemas acoplados de instabilidade e vibrações, e no estudo experimental da interacção líquido-estrutura. Neste trabalho deduzem-se as equações da interacção fundamental das várias situações práticas experimentais referidas, a partir das correspondentes equações diferenciais do contínuo.*

## 1 INTRODUÇÃO

A necessidade de desenvolvimento de técnicas de extrapolação, para uso eficiente de medições de quantidades experimentais, ocorre frequentemente na engenharia.

Na engenharia estrutural – e em relação a experiências associadas a situações de instabilidade de colunas, vigas-coluna e estruturas – não recorrer a metodologias de extrapolação apropriadas poderá originar resultados indefinidos de determinados deslocamentos, ou mesmo a ruína da própria barra ou estrutura. Nestes casos é habitual conduzir as experiências ou testes de carga para acções inferiores às correspondentes acções críticas, e desenvolver meios apropriados de extrapolação baseados em considerações técnicas das teorias ou metodologias associadas ao fenómeno em observação.

Situações semelhantes ocorrem em problemas de vibrações, e até em problemas mixtos ou acoplados de instabilidades e vibrações.

Neste artigo aborda-se o desenvolvimento dessas técnicas de extrapolação, nos dois domínios enunciados de instabilidade e vibrações, baseadas essencialmente nas equações diferenciais de 2ª ordem que traduzem de forma simples e geral o problema estrutural correspondente.

## 2 INSTABILIDADE ELÁSTICA DE COLUNAS

Considere-se por exemplo a situação de equilíbrio de 2ª ordem de barras prismáticas axialmente comprimidas (colunas), que na fase de pré-encurvadura é expresso por

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Pv = 0 \quad (1)$$

em que  $EI$  é a rigidez à flexão (uniforme ou variável com a abcissa longitudinal  $x$  da barra),  $P$  é a carga axial de compressão (suposta constante) e  $v$  é o deslocamento transversal da barra.

Desta equação é possível exprimir o deslocamento  $v$  como

$$v = -\iint \frac{Pv}{EI} dx dx \quad (2)$$

que de certo modo indica a possibilidade de um procedimento iterativo para determinar valores derivados (d) a partir de valores arbitrados (a), através de

$$v_{(d)} = -P \iint \frac{v_{(a)}}{EI} dx dx \quad (3)$$

É reconhecido que o deslocamento transversal da solução de equilíbrio corresponderá a  $v_{(d)} \approx v_{(a)}$ , com determinado rigor de aproximação.

Também – e de acordo com a teoria dos valores e vectores próprios ou teoria dos valores e funções próprias ('Eigen-Value Eigen-Vector Problem') – se uma  $n$ -ésima função própria ou principal  $v_n$  ( $n$ -ésimo modo de instabilidade) for arbitrada como o deslocamento  $v_{(a)}$ , então a equação (3) será satisfeita para o correspondente valor próprio da carga (de instabilidade)  $P_n$ , através de

$$v_n = -P_n \iint \frac{v_n}{EI} dx dx \quad (4)$$

Assim para qualquer valor do deslocamento arbitrado, escalado a partir de  $v_n$  por  $v_{(a)} = a_n v_n$ , o correspondente deslocamento derivado será expresso por

$$\begin{aligned} v_{(d)} &= -P \iint \frac{a_n v_n}{EI} dx dx = \\ &= a_n P \left( -\iint \frac{v_n}{EI} dx dx \right) = a_n \frac{P}{P_n} v_n \end{aligned} \quad (5)$$

Generalizando o resultado anterior, se o deslocamento arbitrado ou assumido for uma combinação linear de funções próprias do deslocamento (ou modos de instabilidade) expressa por

$$v_{(a)} = \sum_1^n a_n v_n \quad (6)$$

então o deslocamento derivado (calculado ou medido) será expresso por

$$v_{(d)} = \sum_1^n a_n \frac{P}{P_n} v_n \quad (7)$$

Sabe-se que o efeito da compressão axial  $P$  é muito mais significativo para o primeiro modo de instabilidade do que para os modos superiores (Bazant e Cedolin, 1991; Barros, 1999-a; Reis e Camotim, 2001), pelo que com muito boa aproximação a equação (7) poderá ser expressa por

$$v_{(d)} \approx a_1 \frac{P}{P_1} v_1 \quad (8)$$

### 3. VIBRAÇÕES ESTRUTURAIS

Considere-se a equação diferencial de movimento livre não amortecido de uma estrutura contínua com distribuição uniforme de propriedades (por exemplo: barra prismática)

$$m \frac{d^2 v}{dt^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (9)$$

em que  $m$  é a massa ou inércia de translação da estrutura por unidade de comprimento,  $EI$  é a rigidez flexional da estrutura por unidade de comprimento e  $v$  é o deslocamento temporal instantâneo da estrutura. Sabe-se que os modos de vibração e as frequências próprias são obtidos da equação (9) por separação de variáveis (Clough e Penzien, 1975), isto é  $v = XT$  em que  $X = X(x)$  e  $T = T(t)$ .

Assim, a equação (9) assume agora a forma

$$\frac{T''}{T} + b^2 \frac{X''''}{X} = 0 \quad (10)$$

na qual  $b^2 = EI/m$  é relacionável com a frequência angular (ou circular) própria  $\omega$  expressa em *rad/s*. De facto designando

$$\frac{b^2 X''''}{X} = \omega^2 \text{ e } \frac{T''}{T} = -\omega^2 \text{ da equação (10)}$$

resultam as seguintes equações diferenciais de 2ª ordem

$$\begin{cases} T'' + \omega^2 T = 0 \\ X'''' - \frac{\omega^2}{b^2} X = X'''' - K^4 X = 0 \end{cases} \quad (11)$$

cujas soluções

$$\begin{aligned} T(t) &= A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \\ X(x) &= C_1 \sin(Kx) + C_2 \cos(Kx) + \\ &+ C_3 \sinh(Kx) + C_4 \cosh(Kx) \end{aligned} \quad (12)$$

são tais que

$$v(x,t) = X \{A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)\} \quad (13)$$

Note-se que as constantes de integração  $C_1, C_2, C_3, C_4$  são determináveis com as condições fronteira da estrutura, enquanto que as constantes de integração  $A, B$  são determinadas com as condições iniciais do problema estrutural em análise. Também, da segunda das equações (11) resulta

$$X'''' = \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = K^4 X = \frac{\omega^2}{b^2} X \quad (14)$$

e portanto as equações (9) e (10) serão alternativamente expressas por

$$\begin{aligned} mXT'' + EITX'''' &= 0 \\ \frac{T''}{T} + \frac{EI}{m}K^4 &= \frac{T''}{T} + \omega^2 = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Desta última equação é possível exprimir o deslocamento  $v = XT$  como

$$v = -\iint \omega^2 v \, dt \, dt \quad (16)$$

que também indica a possibilidade de um procedimento iterativo para determinar valores derivados (d) a partir de valores arbitrados (a), através de

$$v_{(d)} = -\omega^2 \iint v_{(a)} \, dt \, dt \quad (17)$$

É reconhecido que o deslocamento da solução corresponderá a  $v_{(d)} \approx v_{(a)}$ , com determinado rigor de aproximação.

Também se uma  $n$ -ésima função própria ou principal  $v_n$  ( $n$ -ésimo modo de vibração) for arbitrada como o deslocamento  $v_{(a)}$ , então a equação (17) será satisfeita para o correspondente valor próprio da  $n$ -ésima frequência angular natural  $\omega_n$ , através de

$$v_n = -\omega_n^2 \iint v_n \, dt \, dt \quad (18)$$

Assim para qualquer valor do deslocamento arbitrado, escalado a partir de  $v_n$  por  $v_{(a)} = a_n v_n$ , o correspondente deslocamento derivado será expresso por

$$\begin{aligned} v_{(d)} &= -\omega^2 \iint a_n v_n \, dt \, dt = \\ &= a_n \omega^2 \left( -\iint v_n \, dt \, dt \right) = a_n \frac{\omega^2}{\omega_n^2} v_n \end{aligned} \quad (19)$$

Generalizando o resultado anterior, se o deslocamento arbitrado for uma combinação linear de funções próprias do deslocamento (ou modos de vibração), expressa por

$$v_{(a)} = \sum_1^n a_n v_n \quad (20)$$

então o deslocamento instantâneo derivado (calculado ou medido) será expresso por

$$v_{(d)} = \sum_1^n a_n \frac{\omega^2}{\omega_n^2} v_n \quad (21)$$

Sabe-se que o efeito da frequência angular  $\omega$  é mais significativo para os modos inferiores do que para os modos superiores (Clough e Penzien, 1975; Barros, 2001-a), assumindo o maior valor participativo de  $\omega^2/\omega_n^2$  para o primeiro modo. Todavia, consoante o tipo de estrutura e o tipo de resposta estrutural pretendida, o número de contribuições modais significativas que deverá ser utilizado pode ser distinto.

Por exemplo, se para determinar deslocamentos com precisão forem

necessárias as contribuições dos três primeiros modos, ter-se-á

$$v_{(d)} = a_1 \frac{\omega^2}{\omega_1^2} v_1 + a_2 \frac{\omega^2}{\omega_2^2} v_2 + a_3 \frac{\omega^2}{\omega_3^2} v_3 \quad (22)$$

#### 4. INSTABILIDADE INDUZIDA PELA INTERACÇÃO ENTRE SISTEMAS GENERALIZADOS DE CARGA

Considerem-se dois sistemas de cargas actuantes independentemente sobre uma estrutura, por exemplo compressões axiais  $P$  e pesos próprios  $q$ , cada um deles capaz de causar instabilidade estrutural se as correspondentes acções actuarem com os seus valores críticos (isto é: com os primeiros valores, ou fundamentais, das cargas de instabilidade respectivas).

Por hipótese assume-se que os modos de instabilidade são os mesmos para os dois carregamentos distintos. Assim, para qualquer deslocamento generalizado arbitrado como uma combinação linear de funções próprias do deslocamento (ou modos de instabilidade) através da equação (6), resultarão deslocamentos derivados (calculados ou medidos) expressos por

$$\begin{cases} v_{(d)}^{(P)} = \sum_1^n a_n \frac{P}{P_n} v_n \\ v_{(d)}^{(q)} = \sum_1^n a_n \frac{q}{q_n} v_n \end{cases} \quad (23)$$

No limiar de estabilidade ou alternativamente para a situação de instabilidade eminente, o deslocamento derivado do arbitrado após convergência é calculado pelo princípio da sobreposição dos efeitos e é expresso por

$$\begin{aligned} v_{(d)} &\approx v_{(a)} = \sum_1^n a_n v_n = \\ &= \sum_1^n a_n \frac{P}{P_n} v_n + \sum_1^n a_n \frac{q}{q_n} v_n \end{aligned} \quad (24)$$

Por identificação, desta equação resulta a expressão de interacção entre os dois

sistemas independentes de cargas actuantes na estrutura, dada por

$$\forall_n \quad \frac{P}{P_n} + \frac{q}{q_n} = 1 \quad (25)$$

Como em estabilidade estrutural habitualmente só interessa a carga crítica (ou primeira carga de instabilidade), da equação (25) resulta a seguinte equação linear de interacção fundamental

$$\frac{P}{P_1} + \frac{q}{q_1} = 1 \quad (26)$$

Esta equação controla a instabilidade da estrutura correspondente, quando sujeita simultaneamente aos dois carregamentos. Note-se que se a hipótese de igualdade dos modos de instabilidade para os dois carregamentos distintos estiver correcta, a equação (26) será exacta. Se a referida hipótese for uma aproximação, a equação (26) será apenas aproximadamente verificada.

Um exemplo desta situação é o caso típico da instabilidade por encurvadura de um mastro alto, sob a acção simultânea de uma carga pontual na extremidade e de peso próprio por unidade de comprimento do mastro. A aproximação inerente à equação (26) permite compreender o efeito do peso próprio na redução da carga de instabilidade de mastros carregados de ponta.

No caso de mastros uniformes a aproximação é excelente, conforme comparação entre resultados exactos e experimentais (Timoshenko e Gere, 1961). No caso de mastros não uniformes a aproximação é também muito boa, conforme foi validado numericamente por Barros (1999-b, 2002-b) para um mastro com adelgaçamento linear de áreas, cujo dimensionamento detalhado pelo EC-3 foi igualmente verificado.

Este estudo numérico também permitiu verificar a validade da abordagem associada ao desenvolvimento do gráfico ou diagrama de Southwell.

## 5. INSTABILIDADE DE VIGAS-COLUNA: Diagrama de Southwell

Este diagrama constitui uma metodologia já estabelecida (Southwell, 1932) e que se revela muito eficiente na extrapolação de resultados experimentais de estabilidade de colunas e vigas-coluna. É baseado em considerações semelhantes às utilizadas para obter a equação (8), isto é apenas com o primeiro termo considerado significativo, mas agora desenvolvido no contexto específico de vigas-coluna (Bazant e Cedolin, 1991; Barros, 1999-a; Reis e Camotim, 2001).

Considere-se então que uma peça prismática elástica axialmente comprimida por uma força  $P$  possui defeitos iniciais (notação  $i$ ) – (por ex<sup>o</sup>: excentricidades de carga ou deformada inicial) – os quais são expressos em termos dos modos de instabilidade por

$$v_i(x) = \sum_n i_n v_n(x) = \sum_n i_n v_n \quad (27)$$

Os factores  $i_n$  são as amplitudes (supostas conhecidas) das componentes da configuração defeito inicial, isto é segundo cada modo de instabilidade.

A deformação lateral da viga-coluna correspondente ao equilíbrio (notação  $e$ ),  $v_e(x)$ , é determinável por resolução da equação diferencial das vigas-coluna para determinadas condições fronteira. Alternativamente é também expressa através de factores  $e_n$  em termos dos modos de instabilidade por

$$v_e(x) = \sum_n e_n v_n(x) = \sum_n e_n v_n \quad (28)$$

A aplicação de extensões das equações (3) a (7) à situação de equilíbrio, após convergência, corresponde à equação

$$\begin{aligned} v_e = v_{(d)} &= -P \iint \frac{v_{(a)}}{EI} dx dx \\ &= -P \iint \frac{v_i + v_e}{EI} dx dx \end{aligned} \quad (29)$$

e portanto também a

$$\sum_n e_n v_n = \sum_n (i_n + e_n) \frac{P}{P_n} v_n \quad (30)$$

A identificação dos termos nesta última equação permite obter os factores derivados (ou determináveis)  $e_n$  em função dos factores  $i_n$  (conhecidos), através de

$$e_n = \frac{i_n \frac{P}{P_n}}{1 - \frac{P}{P_n}} = i_n \frac{1}{\frac{P_n}{P} - 1} \quad (31)$$

O termo  $\frac{1}{\frac{P_n}{P} - 1}$  é designado de factor de

amplificação do modo  $n$  e quantifica o efeito da carga axial  $P$  no termo modal correspondente.

Conforme já referido o efeito da compressão axial  $P$  é muito mais significativo para o primeiro modo de instabilidade do que para os restantes modos superiores; assim com muito boa aproximação das equações (28), (31) e (27) resulta apenas

$$v_e \approx e_1 v_1 = i_1 \frac{1}{\frac{P_1}{P} - 1} v_1 \approx \frac{1}{\frac{P_1}{P} - 1} v_i \quad (32)$$

e portanto

$$\frac{P_1}{P} v_e \approx v_i + v_e \Rightarrow \frac{v_e}{P} \approx \frac{v_i}{P_1} + \frac{1}{P_1} v_e \quad (33)$$

Esta última versão representa a equação de uma recta da variação linear entre  $\frac{v_e}{P}$  e  $v_e$ , sendo o inverso do seu coeficiente angular igual à carga crítica da viga-coluna a qual não necessita de ser efectivamente aplicada. Esta recta de aproximação designa-se *Diagrama de Southwell*, e portanto é obtido da regressão linear de resultados experimentais entre  $v_e$  e  $\frac{v_e}{P}$  para cada valor da carga aplicada  $P$ .

Note-se portanto a sua grande utilidade para obter a carga crítica de instabilidade de

vigas-coluna e estruturas por extrapolação de resultados experimentais e através de um ensaio não destrutivo.

A Figura 1 apresenta uma fotografia de uma montagem experimental associada à instabilidade de colunas.

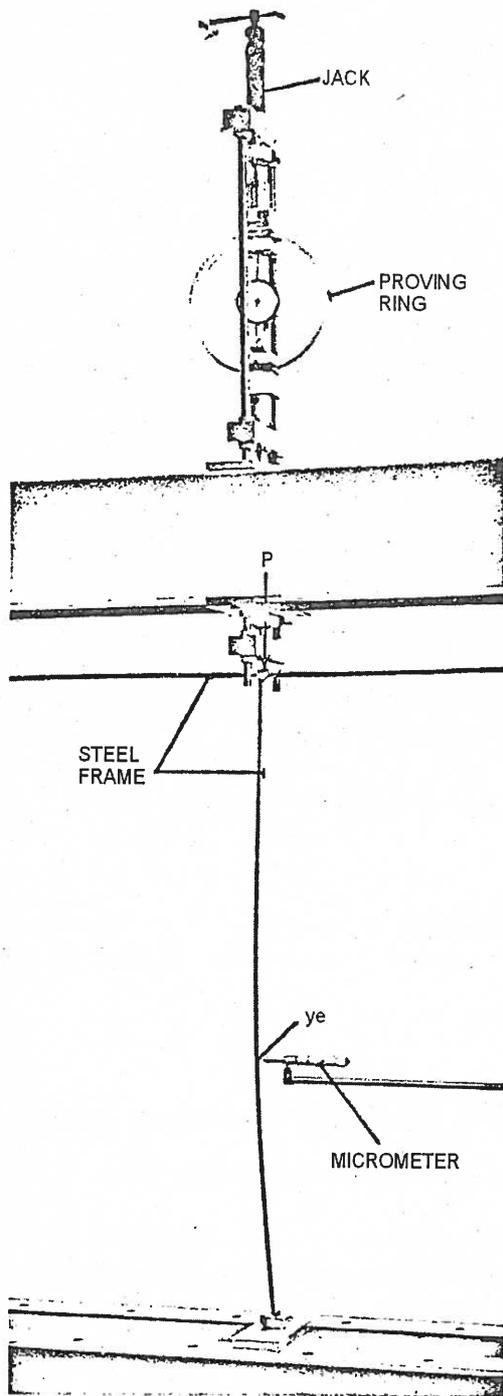


Fig. 1 - Ensaio de instabilidade

A Figura 2 representa a curva de distorção entre carga aplicada  $P$  e deslocamento medido  $y_e$ , traduzindo a informação experimental registada no

ensaio de instabilidade. A Figura 3 representa o Diagrama de Southwell dos dados experimentais da curva de distorção.

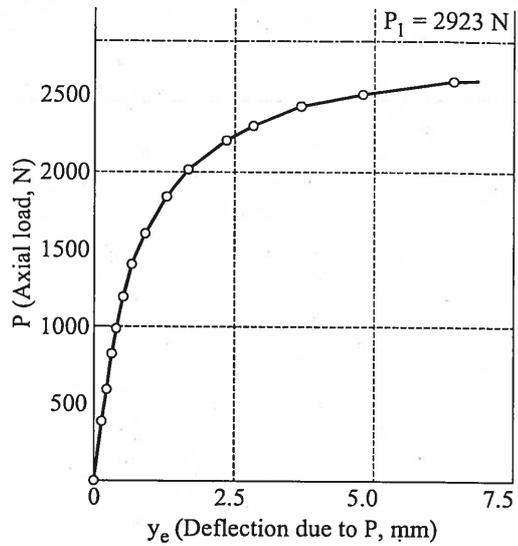


Fig. 2 - Curva de distorção

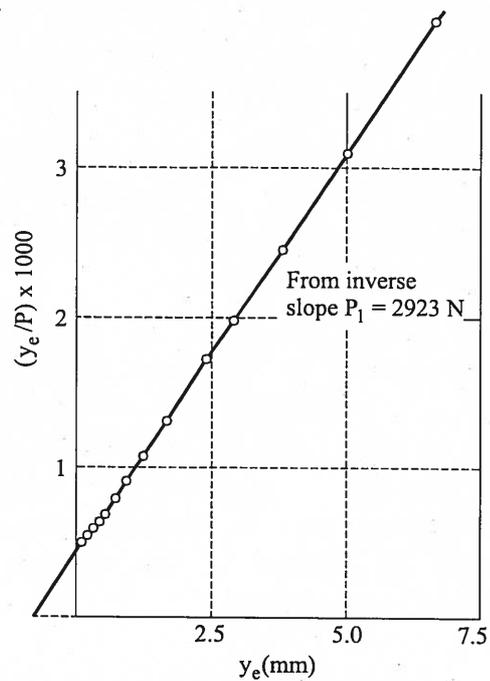


Fig. 3 - Diagrama de Southwell

Do inverso do coeficiente angular da regressão linear da Figura 3 resulta a carga crítica da coluna  $P_1 = 2923 N$ , a qual não necessita de ser efectivamente aplicada.

Na aplicação desta metodologia à determinação da carga crítica de *instabilidade global* de estruturas, considere-se o modelo da Figura 4 de uma estrutura reticulada plana cuja carga de instabilidade se pretende determinar.

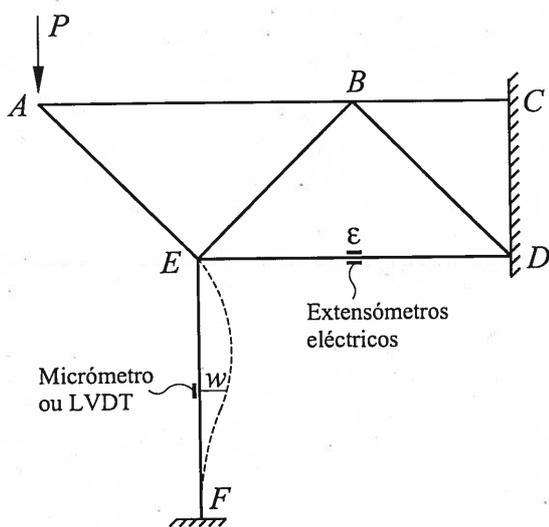


Fig. 4 - Instabilidade global de estrutura

A aplicação de uma carga  $P$  localizada no nó  $A$  induz compressões nas barras seleccionadas  $DE$  e  $EF$ , nas quais se localizam dispositivos de medida de variáveis características do campo de deformações da estrutura global, nomeadamente extensões  $\epsilon$  em  $DE$  (medidas com extensómetros eléctricos de resistência) e deslocamentos transversais  $w$  em  $EF$  (medidos com micrómetro ou LVDT). Ao conjunto de valores das variáveis registadas  $w$  e  $\epsilon$  (ou alternativamente o momento flector correspondente  $M$ ), em função da carga  $P$ , correspondem duas curvas de distorção equivalentes.

Aplicando a ambas a metodologia do Diagrama de Southwell, calculam-se os valores de  $w/P$  vs  $w$  e de  $M/P$  vs  $M$  de cuja regressão linear se calcula o carregamento crítico global  $P_{cr}$  (será o inverso do coeficiente angular de ambas as regressões lineares). O  $P_{cr}$  seria neste caso o valor da carga a aplicar em  $A$  que induziria instabilidade global (no seu conjunto) do pórtico reticulado plano.

Da utilização desta técnica de extrapolação de resultados experimentais associados à instabilidade de colunas, de vigas-coluna e de estruturas, sabe-se que:

- (a) A precisão do resultado depende da validade da hipótese de ser predominante o 1º modo de instabilidade;

- (b) Para pequenos valores de  $P$ , os termos de ordem superior na expansão em série podem ser também significativos, causando desvios dos valores calculados de  $\frac{v_e}{P}$  relativamente à recta de regressão linear;
- (c) Na prática procura-se evitar este problema determinando a regressão apenas com valores de  $P \geq 0.5 P_1$ ;
- (d) Este método recorrendo à representação do Diagrama de Southwell também permite obter indicações sobre o limite de validade da teoria linear dos pequenos deslocamentos, bem como de desempenhos não lineares.

Como exemplo final da utilização deste Diagrama de Southwell, considerem-se os dados da Viga-Coluna Tubular nº 3 ensaiada por Barros (1983) e aqui condensados na Tabela I.

Tabela I - Dados da viga-coluna nº 3

$P$ (N)	$w$ (mm)	$w/P$ (mm/kN)
1182	0,065	0,055
2362	0,451	0,191
2864	0,612	0,214
3337	0,774	0,232
3913	1,032	0,264
4416	1,29	0,292
4844	1,451	0,3
5198	1,677	0,323
5524	1,935	0,35
5729	2,18	0,38
5936	2,45	0,413
6172	2,709	0,439
6379	3,096	0,485

Foi escolhida esta viga-coluna entre as quatro então ensaiadas por ser a correspondente à de maior número de dados experimentais obtidos, nas fases de desempenho elástico não linear e de desempenho elasto-plástico.

A representação comparativa (Figura 5) da variabilidade dos dados  $w$  e  $w/P$ , permite apresentar as situações atrás enunciadas nas alíneas (a)-(d).

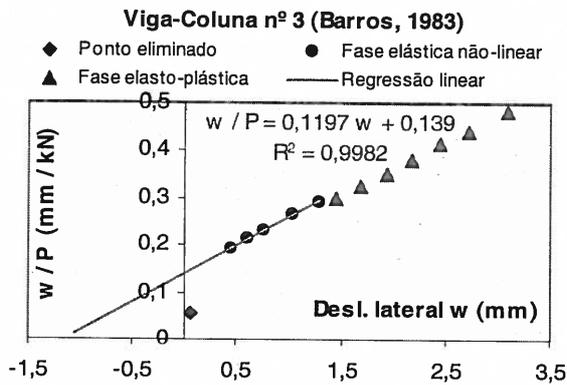


Fig. 5 - Diagrama de Southwell da viga-coluna nº 3

Assim o primeiro ponto de dados foi eliminado de qualquer regressão por corresponder a imprecisões sobre a deformada inicial, numa fase do ensaio em que as deformações iniciais não são neste caso apenas representáveis pela contribuição fundamental do 1º modo de instabilidade. Os 5 pontos seguintes são dados que satisfazem a regressão linear representada, e correspondem ao desempenho elástico não linear da viga-coluna nº 3. Os 7 pontos finais de dados não satisfazem a regressão linear, e correspondem a desempenho elasto-plástico (não linear, material e geométrico) da viga-coluna.

A carga (exacta) de colapso elasto-plástico ou carga última  $P_u$  é computacionalmente determinável através de uma análise elasto-plástica de 2ª ordem com espalhamento de plasticidade, através de plastificações progressivas e eventuais descargas elásticas associadas a determinado critério de cedência.

O valor 'exacto' assim determinado por Barros (1983) – por uma metodologia apropriada em conjunção com o critério de cedência de Tresca – para esta viga-coluna nº 3 foi  $(P_u)_{exacto} = 6266 N$ , com erro relativo de 3% relativamente ao valor obtido experimentalmente de  $(P_u)_{exp} = 6470 N$ .

Alternativamente pode-se obter uma estimativa deste valor pela Fórmula de Merchant-Rankine (Horne e Merchant, 1965). Assim, do inverso do coeficiente angular da regressão linear dos dados

elásticos, resulta a carga crítica ou carga limite de uma análise elástica não-linear de valor  $P_{cr} = \frac{1}{0.1197} 10^3 = 8354 N$ .

A formação de uma rótula plástica na secção a meio vão – por quasi-simetria – satisfaz a curva ou diagrama de interacção  $(M, N)$  da secção transversal (Reis e Camotim, 2001) tubular:

$$\frac{M_{pl}^N}{M_{pl}^0} + \left( \frac{N}{N_{pl}} \right)^2 = 1 \quad (34)$$

Nesta equação  $M_{pl}^N = P(\alpha + w)$  sendo  $\alpha$  uma medida do defeito inicial (excentricidade inicial ou deformação inicial) a meio vão. Para a referida viga-coluna nº 3 ensaiada (Barros, 1983) as propriedades são  $\sigma_y = 4.44 \times 10^8 N/m^2$ ,  $2R = 0.5" = 1.27 cm$ ,  $t = 0.09" = 2.286 mm$ .

$$\begin{aligned} N_{pl} &= N_y = \sigma_y A = \\ &= \sigma_y \left[ \frac{\pi}{4} (12.7^2 - 8.128^2) 10^{-6} \right] \\ &\cong 33206.8 N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{pl}^0 &= \sigma_y Z_p = 4.44 \times 10^8 \times 10^{-9} \times \\ &\times \frac{12.7^3}{6} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{2 \times 2.286}{12.7} \right)^3 \right] \cong 111.84 Nm \end{aligned}$$

A equação de interacção é agora expressa por

$$\frac{P(\alpha + w)}{111.84} + \left( \frac{P}{33206.8} \right)^2 = 1$$

donde resulta que

$$\begin{aligned} 111.84 P^2 + 33206.8^2 (\alpha + w) P - \\ - 111.84 \times 33206.8^2 = 0 \end{aligned}$$

Assim a *Curva de Descarregamento Plástico* da viga-coluna – traduzindo o equilíbrio na configuração deformada correspondente à formação do mecanismo de colapso plástico com rótula plástica a

meio vão – é obtida resolvendo a equação anterior, e é expressa neste caso por

$$P(w) \cong -4.9298 \times 10^6 \times (\alpha + w) + \sqrt{24.303 \times 10^{12} \times (\alpha + w)^2 + 33206.8^2}$$

Para  $w = 0$ , da expressão anterior resulta a carga plástica limite  $P_p$  ou carga limite de uma análise plástica de 1ª ordem.

Estas duas cargas limites associadas às análises referidas permitem determinar uma estimativa da carga última ou de colapso, através da Fórmula de Merchant- Rankine

$$\frac{1}{P_{cr}} + \frac{1}{P_p} = \frac{1}{P_u} \quad (35)$$

Neste caso da viga-coluna nº 3 existem medidas, com a precisão possível, da amplitude da excentricidade inicial a meio vão:  $e_i \approx 2\text{ mm}$ . Também, da extrapolação do diagrama de Southwell da Figura 5 ou pela sua regressão linear, uma estimativa da amplitude do 1º modo da deformada inicial  $i_1$  da viga-coluna é

$$i_1 \approx 0.139 \times P_1 = 0.139 \times 8.354 = 1.16\text{ mm}$$

A Tabela II condensa estas incertezas ou possibilidades, e as suas consequências sobre as estimativas da carga plástica limite e também da carga última ou de colapso avaliada pela Fórmula de Merchant-Rankine (FMR).

Tabela II - Estimativas da carga última  $P_u$

$\alpha$ (mm)	$P_p$ (N)	$(P_u)_{\text{approx}}^{\text{FMR}}$ (N)	$\Delta_{\text{exacto}}$ (%)	$\Delta_{\text{exp}}$ (%)
0	33207	6674	6.5	3.2
1.16	27977	6433	2.7	-0.6
2	24780	6248	-0.3	-3.4
3.16	21101	5985	-4.5	-7.5

Os erros relativos obtidos, face aos valores ‘exactos’ computacional e experimental obtidos por Barros (1983), evidenciam o bom desempenho da FMR com os dados utilizados e disponíveis desta viga-coluna.

A Figura 6 condensa a determinação da carga última pela FMR, no contexto do defeito inicial ‘excentricidade inicial’.

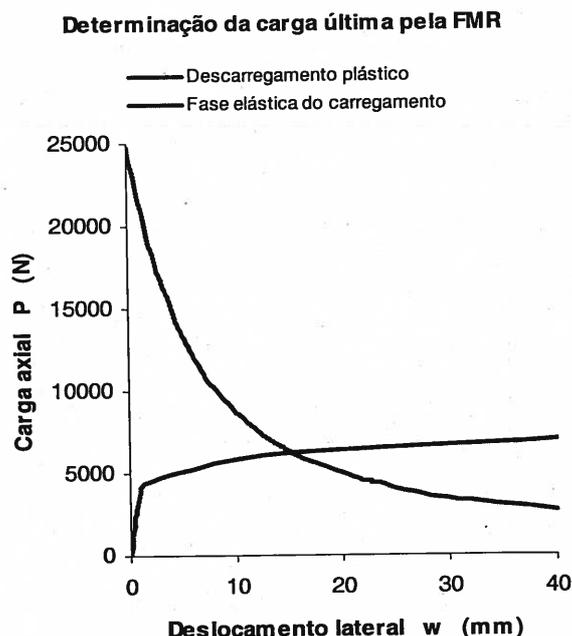


Fig. 6 - Determinação da carga última pela FMR, com  $(\alpha \approx 2\text{ mm})$

Estes exemplos apresentados reforçam o interesse e a aplicação destas metodologias de extrapolação a problemas estruturais de instabilidade. Nos parágrafos seguintes justifica-se igual possibilidade para problemas estruturais de interacção no domínio das vibrações.

## 6. INTERACÇÃO VIBRAÇÃO vs INSTABILIDADE

Considere-se agora uma estrutura elástica sujeita independentemente a compressões axiais  $P$  e a vibrações de frequência angular  $\omega$ . Cada uma destes efeitos é suposto ser capaz de causar instabilidade estrutural ou ressonância, se as correspondentes acções actuarem com os seus valores críticos ou de ressonância da estrutura.

Se por hipótese for assumido que os modos de instabilidade são iguais aos modos de vibração, para qualquer deslocamento generalizado arbitrado pela equação (6) como uma combinação linear de modos de instabilidade (ou, modos de vibração), resultarão deslocamentos

derivados (calculados ou medidos) expressos por

$$v_{(d)}^{(P)} = \sum_1^n a_n \frac{P}{P_n} v_n \quad (36)$$

$$v_{(d)}^{(\omega)} = \sum_1^n a_n \frac{\omega^2}{\omega_n^2} v_n$$

Para a actuação simultânea de ambos os efeitos, o deslocamento derivado do arbitrado após convergência é calculado pelo princípio da sobreposição dos efeitos e é expresso por

$$\begin{aligned} v_{(d)} &\approx v_{(a)} = \sum_1^n a_n v_n = \\ &= \sum_1^n a_n \frac{P}{P_n} v_n + \sum_1^n a_n \frac{\omega^2}{\omega_n^2} v_n \end{aligned} \quad (37)$$

Por identificação, desta equação resulta a expressão de interacção entre vibração e instabilidade dada por

$$\forall_n \quad \frac{P}{P_n} + \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 1 \quad (38)$$

Considerando novamente apenas a primeira contribuição modal, resulta a seguinte equação linear de interacção fundamental entre instabilidade e vibração

$$\frac{P}{P_1} + \frac{\omega^2}{\omega_1^2} = 1 \quad (39)$$

Esta equação – representada na Figura 7 – constitui também uma metodologia de extrapolação de observações e resultados experimentais, ao permitir determinar experimentalmente a carga crítica  $P_1$  através de vibrações da estrutura sujeita a diferentes valores da compressão axial  $P$ .

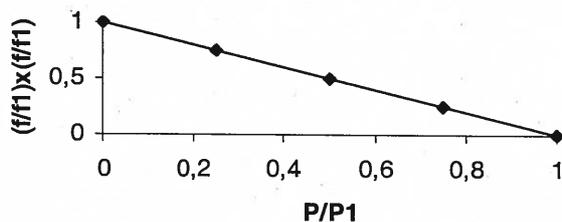


Fig. 7 - Interacção fundamental entre instabilidade e vibração

Também neste caso se a hipótese de igualdade dos modos (funções próprias) estiver correcta (por exemplo, barras de secção constante), a equação (39) será exacta (Lurie, 1952). Se a referida hipótese for uma aproximação, a equação (39) será apenas aproximadamente verificada (por exemplo, vibração de mastros de inércia variável).

## 7. INTERACÇÃO LÍQUIDO vs ESTRUTURA

Na metodologia de extrapolação de resultados experimentais também pode ser integrada a interacção entre massas hidrodinâmicas e estrutura – caso de tanques de armazenamento de líquidos sob acções sísmicas (Barros, 2002-a, 2003) e também de colunas ou torres imersas num escoamento – que será objecto de investigação posterior (Barros, 2001-b) no caso de existência de financiamentos.

Por considerações análogas às utilizadas na obtenção das equações (25) e (26), se determinada estrutura (coluna ou torre imersa num escoamento) tiver uma determinada frequência própria fundamental  $f_1$  quando caracterizada por determinada distribuição de massa  $m_1$  (por exemplo: não-imersa), e se tiver outra frequência própria fundamental  $f_2$  quando caracterizada por determinada distribuição de massa  $m_2$  (por exemplo: imersa), então a frequência própria da estrutura sujeita à situação acoplada (ou de sobreposição) das duas distribuições de massa satisfaz a seguinte equação de interacção fundamental (Figura 8):

$$\left(\frac{f}{f_1}\right)^2 + \left(\frac{f}{f_2}\right)^2 = 1 \quad (40)$$

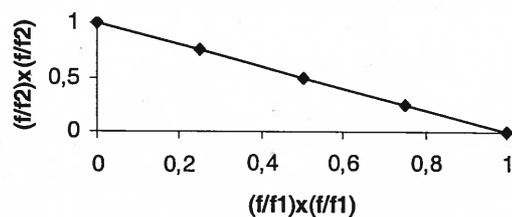


Fig. 8 - Interacção fundamental para vibração de estrutura imersa num fluido

Os desenvolvimentos experimentais e os ensaios que se pretende realizar, poderão contribuir efectivamente para a clarificação e fortalecimento destas mesmas considerações.

## 8. CONCLUSÕES

Apresentaram-se um conjunto de expressões (baseadas nas equações diferenciais da barra estrutural contínua) e um conjunto de considerações (baseadas no desempenho estrutural) que permitiram desenvolver metodologias de extrapolação de resultados e observações experimentais, associados a problemas de instabilidade e vibrações estruturais. Exemplificaram-se e validaram-se aplicações específicas à instabilidade de vigas-coluna. Conforme mencionado os campos de aplicação prática destas metodologias são bastante vastos e incluem situações reais de acoplamento ou interacção entre instabilidade e vibrações, bem como de interacção líquido-estrutura.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho insere-se no conjunto de actividades científicas e técnicas do Projecto POCTI nº 34521/99/ECM/P, no tocante à aplicação destas metodologias à determinação da capacidade resistente de pilares. Também poderá ser incluído no conjunto de actividades científicas e técnicas do Projecto POCTI de nº provisório 41999/ECM/P/2000 (em re-apreciação) do Programa SAPIENS, no tocante à aplicação destas metodologias à determinação experimental da carga última de estruturas metálicas.

Agradece-se à *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* (FCT) do *Ministério da Ciência e Tecnologia* (MCT) a aprovação e a comparticipação orçamental que vem sendo atribuída.

## REFERÊNCIAS

- Barros, R.C., "Buckling Analysis of End Restrained Imperfect Tubular Beam Columns", *Ph.D. Dissertation*, The University of Akron, Ohio, USA, © 1983.
- Barros, R.C., "Apontamentos sobre Instabilidade de Estruturas", Conjunto de trabalhos impressos e manuscritos de apoio ao Mestrado em Estruturas de Eng<sup>a</sup> Civil, *Secção de Estruturas, Dept<sup>o</sup> de Eng<sup>a</sup> Civil, FEUP*, Porto, 1999 (a) e sucessivas actualizações.
- Barros, R.C., "Dimensionamento Estrutural de Mastros Metálicos", *Vigésimo Congresso Ibero-Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia - XX CILAMCE* (e, *1<sup>st</sup> Brazilian Congress on Computational Mechanics*), Publicado no CD-ROM de Proceedings do XX CILAMCE como Trabalho nº 42, págs. 42-1 a 42-16. Ed.: Paulo M. Pimenta, Reyolando M.L.R.F. Brasil e Edgard S. Almeida Neto, ISBN 85-901027-1-8, Sessão: "Steel Structures", 3-5 de Novembro de 1999. Dept<sup>o</sup> de Eng<sup>a</sup> de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 1999 (b).
- Barros, R.C., "Apontamentos sobre Dinâmica de Estruturas", Conjunto de textos impressos em 2001 e baseados em manuscritos do autor de apoio às disciplinas Dinâmica de Estruturas (1985), Dinâmica das Estruturas Marítimas (1986) e Dinâmica de Obras Marítimas (1999), *Dept<sup>o</sup> de Eng<sup>a</sup> Civil, FEUP*, Porto, 2001 (a).
- Barros, R.C., "Dinâmica de Estruturas" *Programa, Conteúdos e Métodos de Ensino Teórico e Prático das Matérias da Disciplina da Licenciatura em Engenharia Civil*, Relatório-programa de disciplina submetido no Concurso para Professor Associado do Departamento de Engenharia Civil na Área de Estruturas, F.E.U.P., Agosto de 2001 (b).
- Barros, R.C., "Seismic Response Envelopes of a Tank Supported at the Base", *Computational Structures Technology, Section: Seismic and Earthquake Engineering*, Ed.: B.H.V. Topping and Z. Bittnar, ISBN 0-948749-81-4 (CD-ROM, Paper 47, 20 pages), Civil-Comp Press, Stirling, Scotland, September 2002 (a).
- Barros, R.C., "Dimensionamento Estrutural de Mastros Metálicos", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* (RIMNCDI) — Ed. E. Oñate (Espania) e J.C. Heinrich (USA), Universitat Politècnica de Catalunya (UPC) — Vol. 18, Nº 3, pp. 351-365, Barcelona, Setembro de 2002 (b).

- Barros, R.C., "On the Development of a Distorted Model for a Seismically Excited Liquid Storage Tank", *Revista Mecânica Experimental*, N° 9, pp 67-74, APAET, LNEC, Lisboa, 2003.
- Bazant, Z.P., and Cedolin, L., "Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories", Oxford University Press Inc., New York, 1991.
- Clough, R.W., and Penzien, J., "Dynamics of Structures", McGraw-Hill Book Company, 1<sup>st</sup> edition, New York, 1975.
- Horne, M.R., and Merchant, W., "The Stability of Frames", Pergamon Press, London, 1965.
- Lurie, H., "Lateral Vibrations as Applied to Structural Stability", *Journal of Applied Mechanics*, Transactions of ASME, Vol.19, pp. 195-204, New York, 1952.
- Reis, A.L. e Camotim, D., "Estabilidade Estrutural", McGraw-Hill de Portugal, 2001.
- Southwell, R.V., "On the Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability", *Proceedings of the Royal Society, Series A*, Vol. 135, p. 601, London, 1932.
- Timoshenko, S.P., and Gere, J.M., "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1961.